КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ ИМ. С. П. КОРОЛЕВА

В. И. ПАНИН, М. И. КОЧНЕВ, К. И. ИВАЩЕНКО, Г. И. ПАНКОВА

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДЕТАЛЕЙ САМОЛЕТА И ДВИГАТЕЛЯ В ЗАДАЧАХ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Куйбышев, 1977

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени С. П. КОРОЛЕВА

В. И. ПАНИН, М. И. КОЧНЕВ, К. И. ИВАЩЕНКО, Г. И. ПАНКОВА

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДЕТАЛЕЙ САМОЛЕТА И ДВИГАТЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ПО НАЧЕРТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Утверждено редакционно-издательским
советом института 4.12.75

КУЙБЫШЕВ, 1977

УДК 515:629.7 (075)

Настоящее пособие является первой частью работы, посвященной проецированию линий, плоскостей и поверхностей, являющихся составной частью деталей машин. В нем дается краткое изложение теории проецирования указанных объектов, рассматриваются типовые задачи.

Методические указания по решению задач, а также принятые обозначения соответствуют современному состоянию теории изображения.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Всякую деталь машины, в том числе самолета и двигателя, можно рассматривать как состоящую из отдельных элементов — линий, плоскостей, поверхностей. Проецирование указанных элементов и решение связанных с этим геометрических задач является одной из целей курса «Начертательная геометрия».

Данное пособие написано применительно к курсу, читаемому в Куйбышевском авиационном институте, и предназначено для облегчения выполнения студентами домашних заданий. Оно состоит из двух разделов.

В первом дается сжатое изложение теоретических вопросов курса и методика решения типовых задач. Во втором рассматриваются некоторые теоретические вопросы и даются соответствующие примеры на построение, отражающие специфику авиационной специальности.

К ним относятся: построение обводов на плоскости, образование и изображение некоторых каркасных поверхностей, сечение этих поверхностей плоскостью и ряд других.

Студентам, работающим по данному пособию, рекомендуется:

изучить теорию требуемого раздела курса по учебникам или конспектам лекций;

прочитать краткое изложение теории, приведенное в соответствующей главе настоящего пособия;

внимательно проанализировать ход решения типовых задач;

приступить к решению задач, указанных в обязательных домашних заданиях и рекомендуемых для дополнительной самостоятельной проработки.

Пособие разработано преподавателями кафедры «Машиностроительное черчение». В нем написаны: § 11, 12, 13, 18, 19, 20 — *Паниным В. И.*, § 3, 8, 9, 10, 14 — *Кочневым М. И.*, § 1, 2, 4, 16, 17— *Иващенко К. И.*, § 5, 6, 7, 15 — *Панковой Г. И.*

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Точки, расположенные в пространстве, обозначены прописными буквами латинского алфавита A, B, C, D... или цифрами 1, 2, 3,...

2. Прямые и кривые линии в пространстве обозначены строчными буквами латинского алфавита a, b, c, ...

3. Плоскости и поверхности обозначены прописными буквами греческого алфавита Γ, Θ, Λ, Σ, Ω, Φ,...

4. Плоскости проекций на комплексном чертеже обозначены прописной буквой греческого алфавита Π, при этом горизонтальная плоскость проекций — Π_1; фронтальная — Π_2; профильная — Π_3.

5. Новые плоскости проекций при замене обозначены буквой Π с добавлением подстрочного индекса: Π_4, Π_5, Π_6, Π_7...

6. Проекции точек, прямых или плоскостей обозначены теми же буквами, что и их оригиналы, с добавлением подстрочного индекса, характеризующего плоскость проекций:

на плоскости Π_1—A_1, a_1, Σ_1;

на плоскости Π_2—A_2, a_2, Θ_2;

на плоскости Π_3—A_3, a_3, Ω_3.

7. Способ задания плоскости указан в скобках рядом с ее буквенным обозначением, например:

$\Theta(A, B, C)$ — плоскость задана тремя точками A, B, C;

$\Omega\ (a \| b)$ — плоскость задана двумя параллельными линиями a и b;

$\Lambda(l \times k)$ — плоскость задана пересекающимися прямыми линиями l и k;

$\Sigma\ (l, A)$ — плоскость задана прямой линией l и точкой A.

8. Особые линии и плоскости имеют постоянные обозначения: линии уровня — горизонталь h, фронталь f, профильная p; плоскости уровня — горизонтальная Γ, фронтальная Φ, профильная ψ.

9. Углы обозначения строчными буквами греческого алфавита — α, β, γ, ω, φ,...

10. Основные операции обозначены следующим образом;

совпадение двух геометрических элементов отмечается знаком $\equiv$, например, $a \equiv b$, $A_1 \equiv B_1$....

взаимная принадлежность геометрических элементов, обозначены знаком $\in$, например, $A \in \Sigma$, $l \in \Theta$, ...

пересечение двух элементов обозначено знаком $\times$, например, $a \times k$, $a \times \Theta$.

результат геометрической операции отмечен знаком $=$, например, $K = l \times \Theta$.

Раздел I

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ КУРСА И МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Глава I. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

§ 1. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ

В инженерной практике наибольшее применение получил *комплексный двух- или трехкартинный чертеж.*

Принцип образования такого чертежа заключается в том, что оригинал ортогонально проецируется на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций, которые затем соответствующим образом совмещаются с плоскостью чертежа.

Плоскости проекций называются горизонтальной, фронтальной и профильной и обозначаются $П_1$, $П_2$ и $П_3$ (рис. 1). Прямые, по которым пересекаются плоскости проекций, называются осями проекций и обозначаются OX, $OУ$ и OZ.

Спроецируем ортогонально на три плоскости проекций точку A, получим A_1 — *горизонтальную проекцию точки* на плоскости $П_1$, A_2 — *фронтальную проекцию* на плоскости $П_2$ и A_3 — *профильную проекцию* на плоскости $П_3$.

Для построения комплексного чертежа совместим плоскости проекций $П_1$ и $П_3$ с плоскостью $П_2$, вращая плоскость $П_1$ вокруг оси OX, а плоскость $П_3$ — вокруг оси OZ в направлении, указанном стрелками.

Полученный комплексный чертеж точки A будет состоять из трех проекций точки, расположенных на соответствующих линиях связи: горизонтальной и фронтальной проекции — на вертикальной линии связи; фронтальной и профильной проекции — на горизонтальной линии связи; горизонтальной и профильной проекции — на ломаной горизонтально-вертикальной линии связи.

Прямая, на которой находится вершина A_0 ломаной линии связи, является биссектрисой угла $УOУ_1$ между осями проекций и называется *постоянной прямой преломления.*

По комплексному чертежу определяются расстояния точки до плоскостей проекций:

до пл. $П_1$ — $A_2A_x = AA_1 = Z_A = h_A$ — высота точки;
до пл. $П_2$ — $A_1A_x = AA_2 = y_A = f_A$ — глубина точки;
до пл. $П_3$ — $A_1A_y = AA_3 = x_A = p_A$ — широта точки.

Пример 1. Построить наглядное изображение и комплексный чертеж точек, если:

1) точка B находится на расстоянии 5 единиц от пл. $П_1$; 3 единиц — от пл. $П_2$ и 4 единиц от пл. $П_3$;

2) точка C находится в плоскости $П_2$ на расстоянии 7 единиц от пл. $П_1$ и 6 единиц от пл. $П_3$;

3) точка $Д$ находится на оси ОУ на расстоянии 5 единиц от пл. $П_2$ **(рис. 2)**.

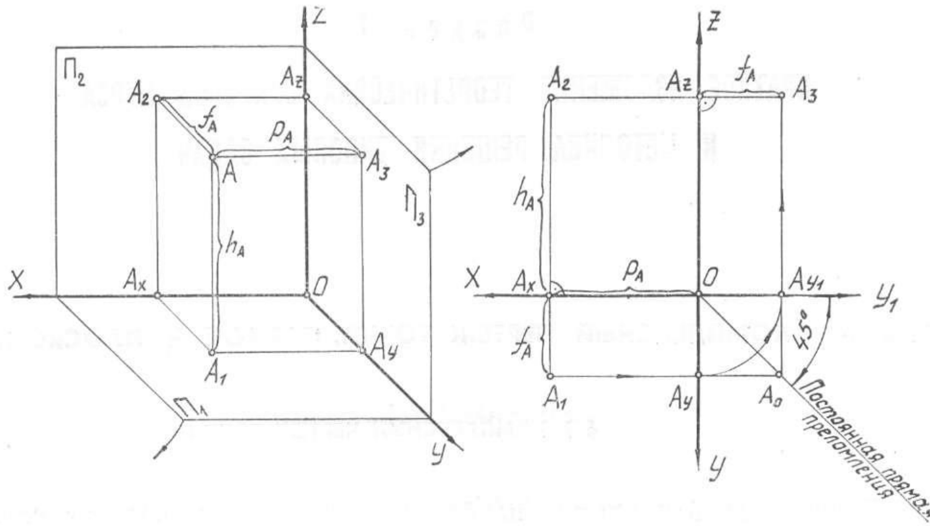


Рис. 1

Для построения наглядного изображения на осях проекций откладываются расстояния точек до соответствующих плоскостей проекций. Полученные точки, например B_x, B_y, B_z, используются для построения параллелепипеда координат, вершины которого определят саму точку в пространстве и ее проекции на плоскостях проекций.

На комплексном чертеже вспомогательные точки на осях проекций B_x, B_y, B_z используются для построения проекций точки на плоскостях проекций.

П р и м е р 2. Построить недостающие проекции точек, заданных на комплексном чертеже своими двумя проекциями: $E(E_2, E_3)$; $F(F_1, F_2)$; $K(K_2, K_3)$ (рис. 3).

Искомые проекции точек находим с помощью вертикальных и горизонтальных линий связи, проведенных через заданные проекции. Последовательность построения отмечена стрелками.

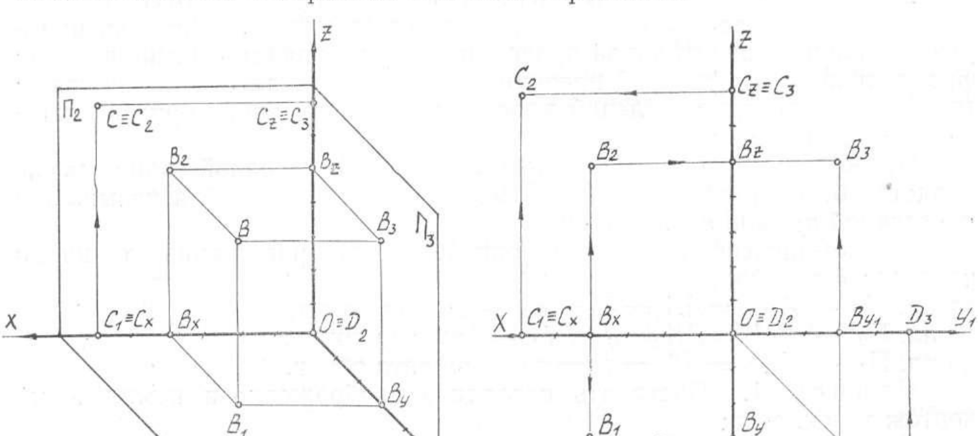


Рис. 2

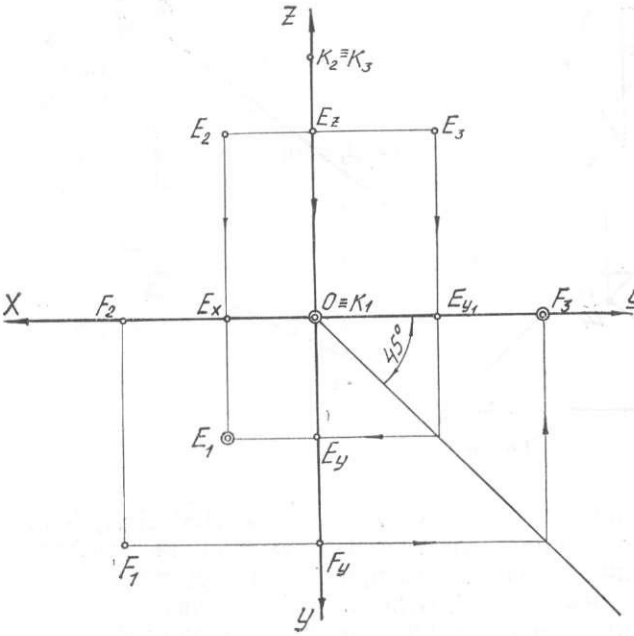


Рис. 3

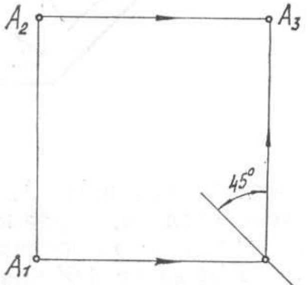


Рис. 4

Поскольку при параллельном переносе плоскостей проекций изображения оригинала не изменяются, то нет необходимости фиксировать полученные изображения относительно постоянных осей проекций.

В дальнейшем оси проекций на чертежах не будут изображаться. При необходимости построения профильной проекции используется прямая преломления, показанная на рис. 1. Безосный комплексный чертеж точки будет иметь вид, приведенный на рис. 4.

§ 2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ПРЯМОЙ. НАТУРАЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ

Прямая линия определяется двумя точками, поэтому на комплексном чертеже всякая прямая l может быть задана проекциями A_1 и A_2, B_1 и B_2 двух ее точек A и B (рис. 5).

Прямая линия в пространстве по отношению к плоскостям проекций может занимать произвольное или частное положение.

Прямая, произвольно расположенная по отношению к плоскостям проекций, называется *прямой общего положения*. Проекции такой прямой на комплексном чертеже расположены под произвольными углами к линиям связи.

Проекция отрезка прямой общего положения на любую из плоскостей проекций меньше его натуральной величины. Для определения натуральной величины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям проекций пользуются способом прямоугольного треугольника.

Рассмотрим отрезок AB прямой общего положения l (рис. 6). Спроецируем точки A и B на плоскость Π_1. Угол α между проекцией A_1B_1 и самим отрезком AB будет являться углом наклона AB к плос-

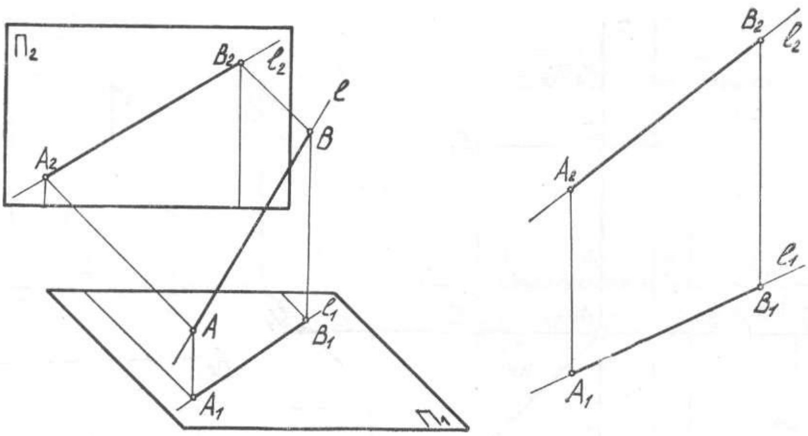


Рис. 5

кости проекций $П_1$. Проведем через точку A прямую $AB' \parallel A_1B_1$ и, следовательно, параллельную плоскости $П_1$. На основании свойств параллельного проецирования в полученном прямоугольном треугольнике $AB'B$ катет AB' равен проекции A_1B_1 отрезка AB, следовательно, на комплексном чертеже проекцию A_1B_1 можно принять за один из катетов прямоугольного треугольника. Вторым катетом будет отрезок B_1B_0, равный отрезку $B_2B'_2$, который, как видно из рисунка, равен отрезку BB', т. е. он представляет собой по величине отрезок, равный разности расстояний точки B и A относительно горизонтальной плоскости проекций.

Гипотенуза прямоугольного треугольника A_1B_0 равна натуральной величине отрезка AB. Угол α между A_1B_1 и A_1B_0 равен натуральной величине угла наклона прямой l к горизонтальной плоскости проекций. Отсюда следует вывод, что натуральная величина отрезка прямой общего положения равна гипотенузе прямоугольного треугольника, одним катетом которого является проекция отрезка на любую плоскость проекций, а вторым — разность расстояний концов отрезка от той же плоскости проекций. Угол между катетом-проекцией и гипотенузой равен натуральной величине угла наклона отрезка к той плоскости проекций, на которой выполнены построения.

Определение углов наклона β и γ к фронтальной и профильной плоскостям проекций выполняется аналогично и показано на комплексном чертеже (рис. 7).

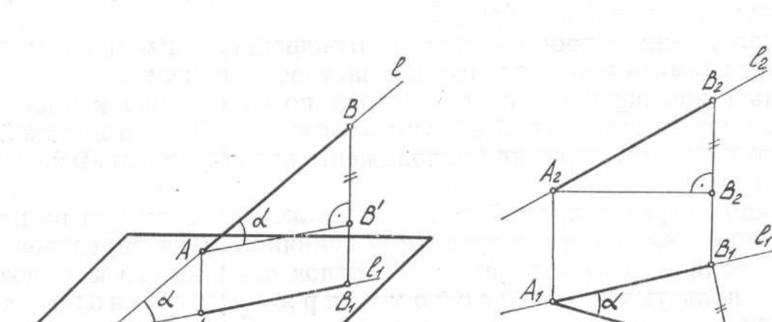


Рис. 6

Прямой частного положения называется прямая, параллельная или перпендикулярная к плоскости проекций, а также лежащая в плоскости проекций.

Прямые, параллельные плоскостям проекций, называются *линиями уровня,* а прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, — *проецирующими прямыми.*

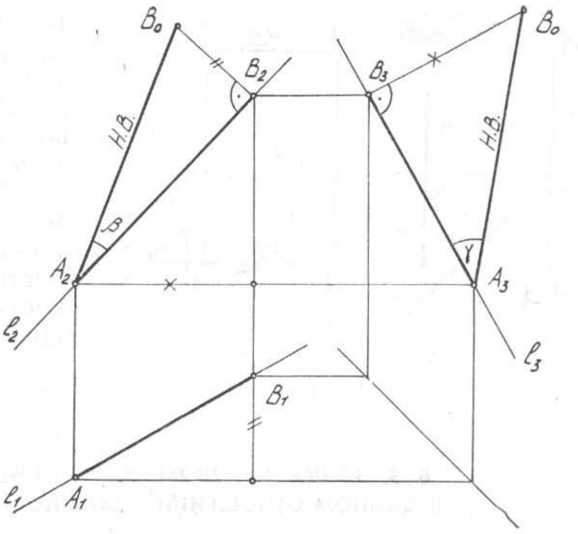


Рис. 7

Прямая, параллельная плоскости Π_1, называется *горизонтальной прямой или горизонталью (h).* Фронтальная проекция этой прямой перпендикулярна к вертикальным линиям связи $A_2B_2 \perp A_1A_2$. Горизонтальная проекция равна натуральной величине отрезка $A_1B_1 = AB$. Угол β между горизонтальной проекцией A_1B_1 и линией, перпендикулярной линиям связи, равен натуральному углу наклона прямой к фронтальной плоскости проекций (Рис. 8, а).

Прямая, параллельная плоскости Π_2, называется *фронтальной прямой или фронталью (f).* Горизонтальная проекция этой прямой перпендикулярна к вертикальным линиям связи $A_1B_1 \perp A_1A_2$. Фронтальная проекция равна натуральной величине отрезка $A_2B_2 = AB$. Угол α между фронтальной проекцией A_2B_2 и линией, перпендикулярной линиям связи, равен натуральному углу наклона прямой f к горизонтальной плоскости проекций (рис. 8, б).

Прямая, параллельная плоскости Π_3, называется *профильной прямой (p).* Горизонтальная A_1B_1 и фронтальная A_2B_2 проекции профильной прямой совпадают с вертикальной линией связи. Профильная проекция A_3B_3 отрезка этой прямой равна натуральной величине AB, $A_3B_3 = AB$. Угол α — угол наклона прямой к плоскости Π_1, а угол β к плоскости Π_2 (рис. 8, в).

Прямая, перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекций,

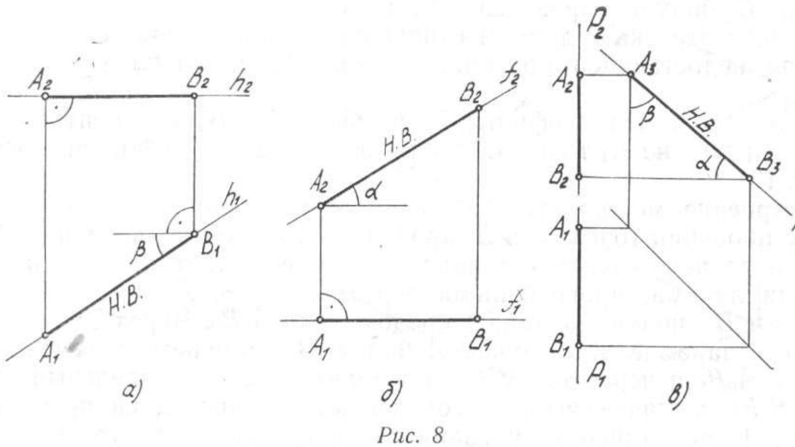


Рис. 8

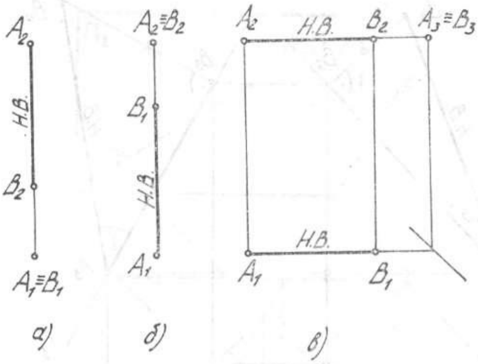


Рис. 9

называется *горизонтально-проецирующей* (рис. 9, а), к фронтальной — *фронтально-проецирующей* (рис. 9, б), к профильной — *профильно-проецирующей* (рис. 9, в).

Из чертежа видно, что прямая, перпендикулярная к плоскости, проецируется на эту плоскость в точку, а на другую плоскость — в прямую, совпадающую с линией связи. Длина проекции отрезка равна натуральной величине самого отрезка.

§ 3. ТОЧКА НА ПРЯМОЙ. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

Точка в пространстве может принадлежать прямой и находиться вне ее.

Если точка A принадлежит прямой l $(l_1 l_2)$, то на основании свойства взаимной принадлежности ее проекции принадлежат одноименным проекциям этой прямой и находятся на одной линии связи (рис.10).

Если точка B не принадлежит прямой l $(l_1 l_2)$, то и проекции ее B_1 и B_2 не принадлежат проекциям прямой l_1 и l_2.

Если точка C, принадлежащая прямой l, делит отрезок этой прямой AB на две части, относящиеся как $m:n$, то на основании свойств параллельного проецирования проекция этой точки делит проекцию отрезка в том же отношении (рис. 11). Следовательно, чтобы разделить отрезок прямой в данном отношении, необходимо разделить в этом отношении его проекции, заданные на комплексном чертеже.

П р и м е р 3. Построить точку C, принадлежащую отрезку AB и делящую его в отношении 1:2 (рис. 12).

Горизонтальную проекцию A_1B_1 разделим на две части A_1C_1 и C_1B_1. Для этого из точки A_1 проводим произвольную прямую, на которой от точки A_1 берем три равных отрезка произвольной величины. Конечную точку B_0 соединяем с точкой B_1. Проведя через точку C_0 прямую, параллельную B_0B_1, до пересечения с A_1B_1, получим точку C_1, которая разделит горизонтальную проекцию A_1B_1 в отношении 1:2. Фронтальную проекцию C_2 получим проведением линии связи C_1C_2.

Деление отрезка в данном отношении удобно использовать для нахождения недостающей проекции точки, принадлежащей профильной прямой.

П р и м е р 4. На профильной прямой p (A, B) построить горизонтальную проекцию C_1 точки C, если известна ее фронтальная проекция C_2 (рис. 13).

Построение можно выполнить следующим образом: через фронтальные проекции точек A_2 и B_2 проводим два произвольных параллельных луча до пересечения в точках A_0 и B_0 с соответствующими параллельными лучами, проведенными через проекции A_1 и B_1. Соединяем точки A_0 и B_0, получаем линию преломления A_0B_0. Через точку C_2 проводим луч, параллельный лучам A_2A_0 и B_2B_0, до пересечения в точке C_0 с прямой A_0B_0 и через точку C_0 проводим луч, параллельный лучам A_1A_0 и B_1B_0, до пересечения с горизонтальной проекцией p_1 в искомой точке C_1. Справедливость указанного построения следует из свойств

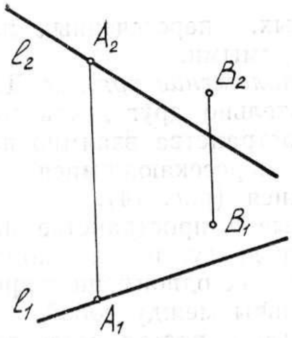


Рис. 10

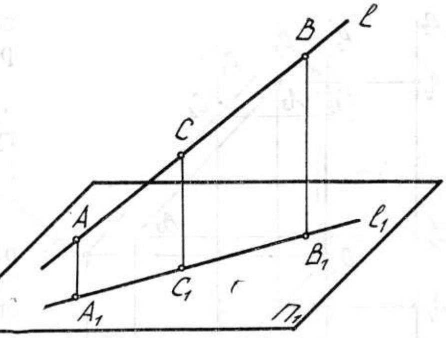


Рис. 11

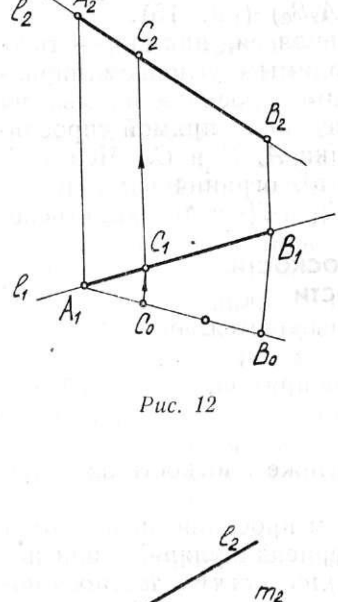


Рис. 12

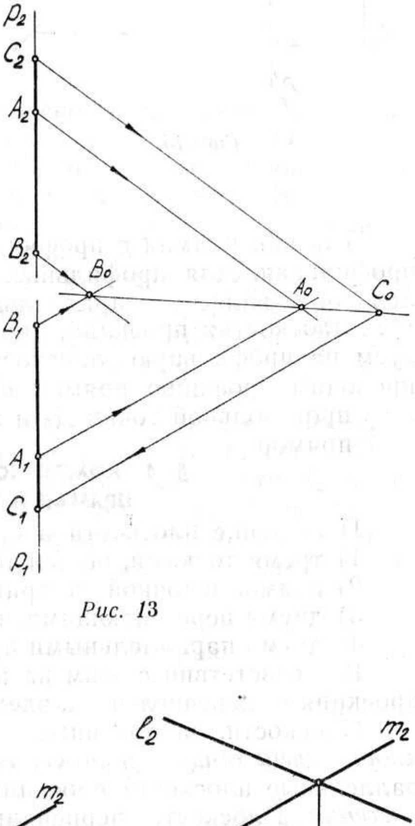


Рис. 13

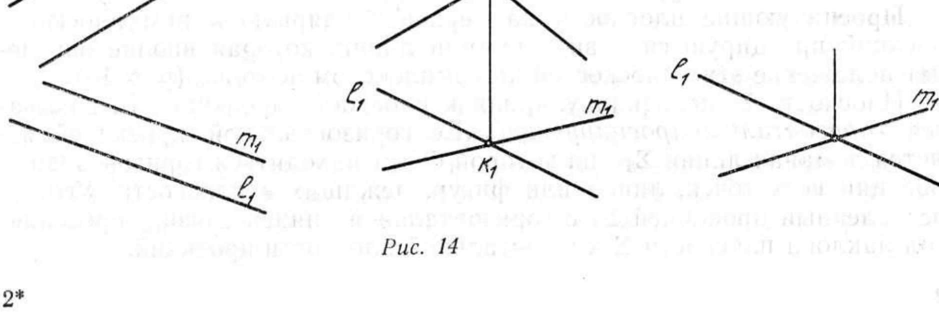


Рис. 14

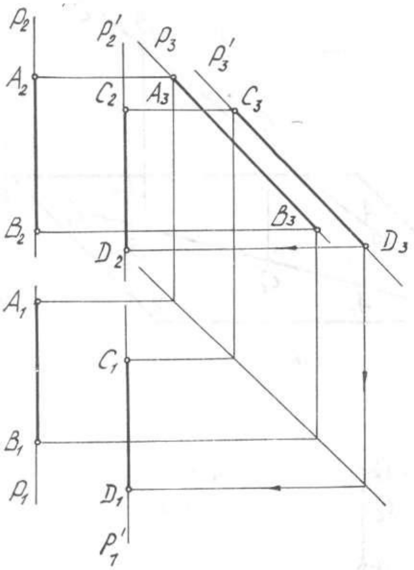


Рис. 15

отрезков прямых, пересеченных параллельными прямыми.

Взаимное положение прямых. Две прямые относительно друг друга могут быть в пространстве взаимно параллельными, пересекающимися и скрещивающимися (рис. 14).

Если прямые в пространстве параллельны друг другу, то на комплексном чертеже их одноименные проекции параллельны между собой.

Если прямые в пространстве пересекаются, то на комплексном чертеже их одноименные проекции также пересекаются друг с другом в точках, лежащих на одной линии связи.

Если прямые в пространстве скрещиваются, то на комплексном чертеже их одноименные проекции могут пересекаться, но точки их пересечения не лежат на одной линии связи.

Пример 5. Через точку C провести прямую p, параллельную прямой p (A_1B_1, A_2B_2) (рис. 15).

Так как прямая p профильная, параллельная ей прямая — тоже профильная. Для профильных прямых необходимым условием параллельности является параллельность одноименных проекций прямых на трех плоскостях проекций, поэтому для проведения прямой спроецируем на профильную плоскость проекций точки A, B и C. Через C_3 проводим проекцию прямой p'^3 параллельно p^3, ограничиваем проекцию произвольной точки $Д_3$ и затем находим $Д_1$ и $Д_2$ и проекции искомой прямой.

§ 4. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ПЛОСКОСТИ. ПРЯМАЯ И ТОЧКА В ПЛОСКОСТИ

Положение плоскости в пространстве определяется:

1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
2) прямой и точкой, не принадлежащей этой прямой;
3) двумя пересекающимися прямыми;
4) двумя параллельными прямыми.

В соответствии с этим на комплексном чертеже плоскость задается проекциями перечисленных элементов.

Плоскости, наклоненные ко всем плоскостям проекций, называются *плоскостями общего положения.* Плоскости, перпендикулярные или параллельные плоскости проекций, называются *плоскостями частного положения.* Плоскости, перпендикулярные плоскостям проекций, называются *проецирующими,* а плоскости, параллельные плоскостям проекций, — *плоскостями уровня.*

Проецирующие плоскости на перпендикулярную к ним плоскость проекций проецируются в виде прямой линии, которая вполне определяет положение этих плоскостей на комплексном чертеже (рис. 16).

Плоскость Σ, перпендикулярная к плоскости проекций Π_1, называется *горизонтально-проецирующей.* Ее горизонтальной проекцией является ломаная линия Σ_{11}, на которой будут находиться горизонтальные проекции всех точек, линий или фигур, лежащих в плоскости. Угол β, составленный проекцией Σ_1 с горизонтальной линией связи, определяет угол наклона плоскости Σ к фронтальной плоскости проекций.

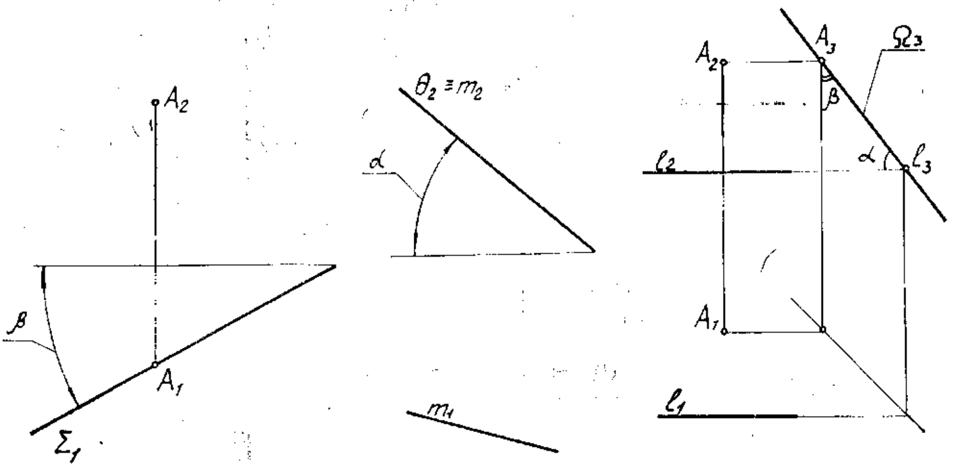


Рис. 16

Плоскость Θ, перпендикулярная к плоскости проекций Π_2, называется *фронтально-проецирующей.* Фронтальная проекция этой плоскости представляет прямую линию Θ_2, на которой находятся фронтальные проекции всех прямых и точек, принадлежащих плоскости Θ. Угол α между прямой Θ_2 и горизонтальной линией связи равен углу наклона плоскости Θ к горизонтальной плоскости проекций.

Плоскость Ω (A, l), перпендикулярная к плоскости проекций Π_3, называется *профильно-проецирующей.* Профильная проекция этой плоскости представляет прямую Ω_3, а углы α и β между этой прямой и линиями связи определяют углы наклона плоскости Ω к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций.

На рис. 17 представлены плоскости уровня: плоскость Γ — горизонтальная плоскость уровня, параллельная плоскости Π_1; плоскcть Ф — фронтальная плоскость уровня, параллельная плоскости Π_2; плоскость Ψ — профильная плоскость уровня, параллельная плоскости Π_3.

Любая прямая или фигура, лежащая в плоскости Г, Ф или Ψ, проецируется без искажения соответственно на плоскости проекций Π_1, Π_2 или Π_3.

Прямая и точка в плоскости.

Прямая линия принадлежит плоскости, если она проходит:

1) через две точки этой плоскости;

2) через точку плоскости параллельно любой прямой этой плоскости.

Точка принадлежит плоскости, если она находится на прямой этой плоскости.

В плоскости общего положения могут находиться прямые общего положения, прямые уровня (горизонталь, фронталь, профильная прямая), а также линии наибольшего уклона.

На рис. 18 плоскость Σ задана двумя пересекающимися прямыми общего положения a и $в$.

В этой плоскости проведены прямые уровня — горизонталь h, параллельная горизонтальной плоскости проекций, и фронталь f, параллельная фронтальной плоскости проекций.

Построение горизонтали начинается с проведения ее фронтальной проекции $h_2(A_2B_2)$, перпендикулярной линиям связи, затем строится ее горизонтальная проекция $h_1(A_1B_1)$ по точкам пересечения горизонтали с заданными прямыми.

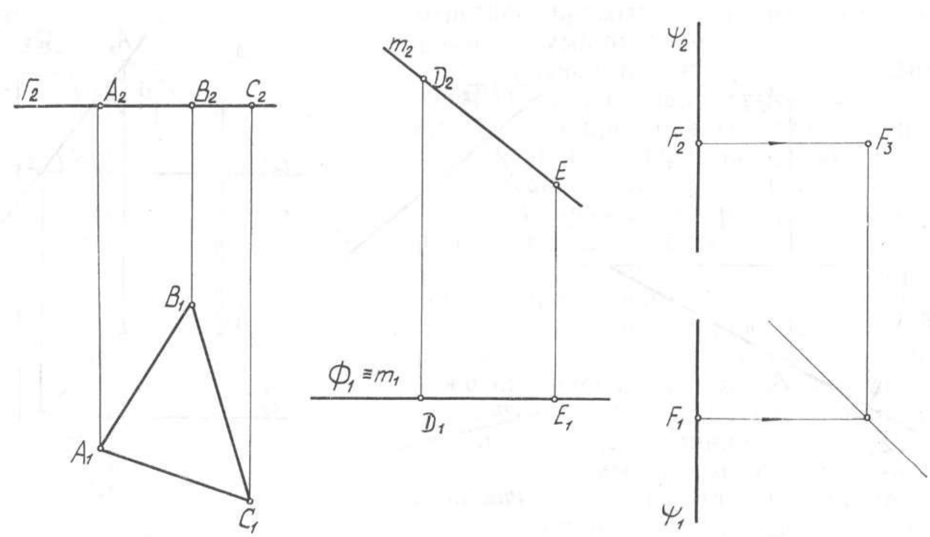

Γ₂
A₂
B₂
C₂
B₁
A₁
C₁
m₂
D₂
E
Φ₁ ≡ m₁
D₁
E₁
Ψ₂
F₂
F₃
F₁
Ψ₁

Рис. 17

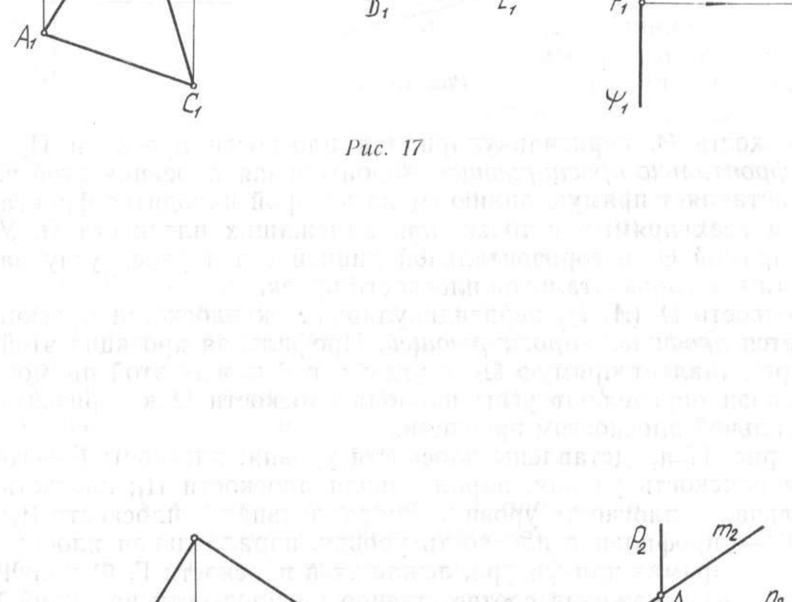

h₂
A₂
B₂
f₂
D₂
b₂
C₂
a₂
h₁
A₁
B₁
f₁
C₁
D₁
b₁
a₁
p₂
m₂
A₂
n₂
B₂
B₁
n₁
A₁
m₁
p₁

Рис. 18

Построение фронтали начинается с проведения ее горизонтальной проекции $f_1(C_1Д_1)$ перпендикулярной линиям связи, затем строится ее фронтальная проекция f_2 $(C_2Д_2)$ по точкам пересечения фронтали с заданными прямыми.

В плоскости Θ, заданной двумя параллельными прямыми m и n, проведена профильная прямая p, параллельная профильной плоскости проекций, ее проекции p_1 и p_2 совпадают с вертикальной линией связи.

Пример 6. Построить недостающую проекцию прямой $l(l_2)$, принадлежащей плоскости $\Sigma(f \times h)$ (рис. 19).

Построим точки пересечения прямой l с заданными прямыми. Для этого продолжим фронтальную проекцию прямой до пересечения с фронтальными проекциями заданных прямых в точках A_2 и B_2. Затем строим горизонтальные проекции этих точек, которые определяют искомую горизонтальную проекцию l_1 прямой l.

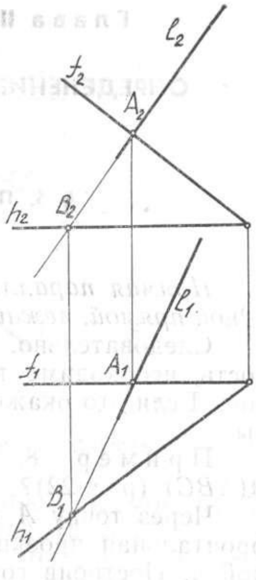


Рис. 19

Пример 7. Построить недостающие проекции точки $A(A_1)$, лежащей в плоскости $\Theta(m \| n)$ (рис. 20), и точки $D(D_2)$, принадлежащей плоскости $\Omega(f \times h)$ (рис. 21).

Через точку A проводим произвольную прямую l, принадлежащую плоскости Θ, для чего сначала проводим ее горизонтальную проекцию l_1, а затем по точкам B и C строим ее фронтальную проекцию l_2, на которой будет находиться искомая проекция A_2 точки.

Искомую проекцию точки D находим с помощью фронтали f', проходящей через точку D и принадлежащей плоскости Ω.

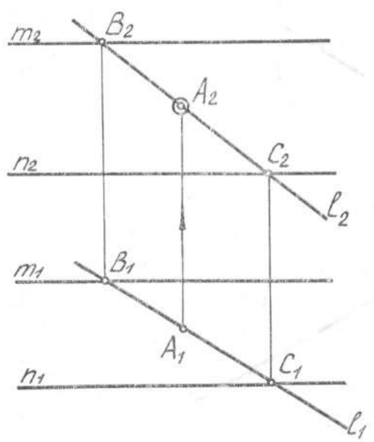


Рис. 20.

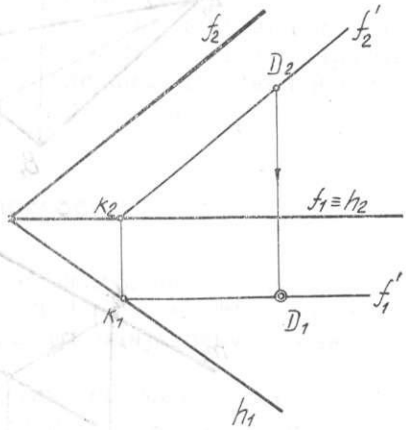


Рис. 21

Глава II. ОСНОВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ И МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

§ 5. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна хотя бы одной прямой, лежащей в плоскости.

Следовательно, чтобы проверить, параллельны ли прямая и плоскость, необходимо провести в плоскости прямую, параллельную данной. Если это окажется возможным, то плоскость и прямая параллельны.

Пример 8. Параллельны ли прямая $a(a_1, a_2)$ и плоскость $\Theta(ABC)$ (рис. 22)?

Через точку A плоскости проведем прямую AD так, чтобы ее фронтальная проекция была параллельна фронтальной проекции прямой a. Построив горизонтальную проекцию A_1D_1, устанавливаем, что

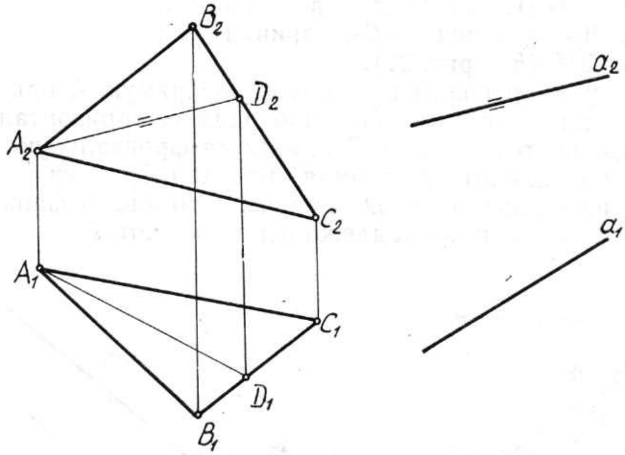


Рис. 22

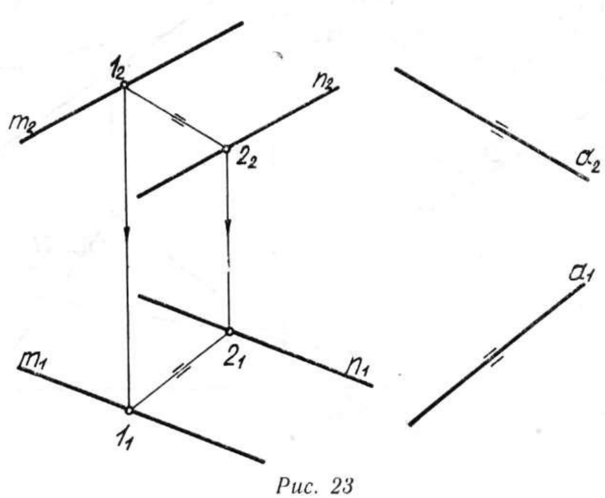


Рис. 23

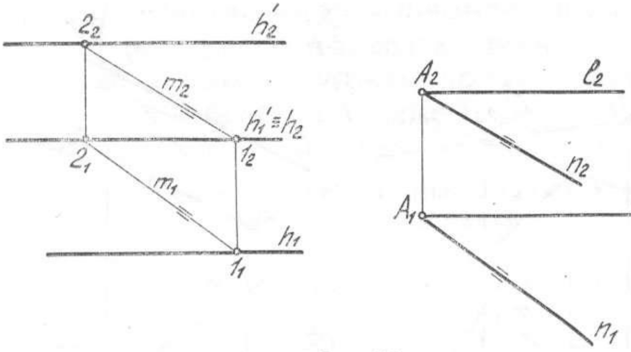


Рис. 24

A_1D_1 не параллельна a_1, следовательно, прямая a и плоскость не параллельны.

П р и м е р 9. Построить недостающую проекцию прямой $n(n_2)$, если плоскость $\Sigma(m \| n)$ параллельна прямой $a(a_1;\ a_2)$ (рис. 23).

Поскольку искомая плоскость Σ параллельна прямой a, необходимо в плоскости построить прямую, параллельную a. Фронтальная проекция этой прямой 1_2, 2_2 параллельна a_2, горизонтальная — $1_1 2_2 \| a_2$. Точка 2_1 должна принадлежать искомой проекции-прямой n_1.

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

П р и м е р 10. Построить плоскость Σ, проходящую через точку $A(A_1 A_2)$, и параллельную плоскости $\Theta(h \| h')$ (рис. 24).

Согласно признаку параллельности плоскостей, искомая плоскость Σ должна содержать две пересекающиеся прямые, соответственно параллельные двум пересекающимся прямым, лежащим в заданной плоскости Θ. Искомую плоскость выразим двумя прямыми l и n, проходящими через точку A и соответственно параллельными заданной прямой h и прямой m, произвольно построенной в плоскости.

§ 6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости пересекаются по прямой, положение которой определяется двумя принадлежащими ей точками. При известном направлении линии пересечения достаточно определить одну точку, принадлежащую этой линии.

Если одна из пересекающихся плоскостей частного положения, то проекция линии пересечения совпадает с вырожденной проекцией этой плоскости.

Это положение вытекает из свойства проекций прямых, лежащих в проецирующих плоскостях.

На рис. 25 показана линия пересечения q плоскостей $\Theta(\Theta_2)$ и $\Sigma(m \times n)$, а также плоскостей $\Phi(\Phi_1)$ и $\Lambda(l \| k)$.

Если обе пересекающиеся плоскости, проецирующие по отношению к одной из плоскостей, то линия пересечения (q) является проецирующей прямой (рис. 26).

Это следует из того, что если две плоскости перпендикулярны третьей, то линия их пересечения также перпендикулярна этой плоскости.

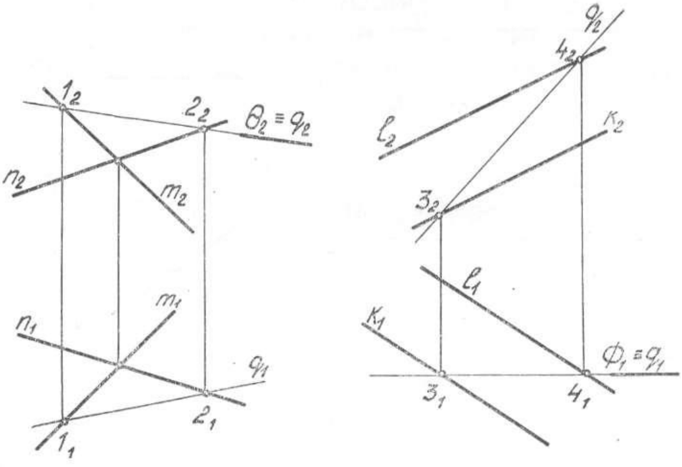


Рис. 25

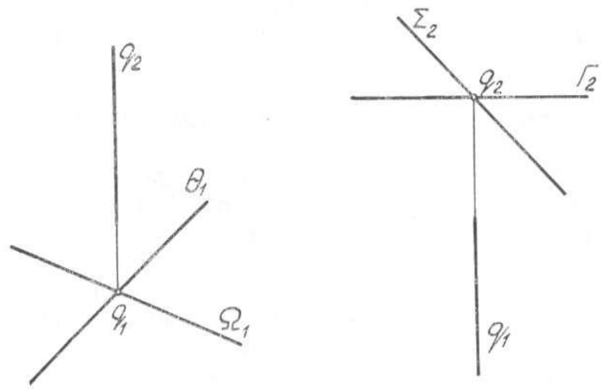


Рис. 26

Решение задач на построении линии пересечения плоскостей основано на применении вышеуказанных положений и осуществляется по следующей схеме:

вводится вспомогательная плоскость-посредник частного положения;

определяется линия пересечения каждой из заданных плоскостей с плоскостью-посредником;

на пересечении этих линий находится точка, принадлежащая обеим плоскостям. Аналогично находится и вторая точка.

Пример 11. Даны плоскости $\Sigma(k\|l)$ и $\Theta(m\times n)$. Построить их линию пересечения (рис. 27).

Рассечем обе заданные плоскости фронтальной плоскостью-посредником $\Phi(\Phi_1)$. Она пересечет плоскость Σ по прямой 1, 2, а плоскость Θ по прямой 3, 4, точка пересечения фронтальных проекций которых A_2 и соответствующая точка A_1 определит точку A, принадлежащую искомой линии пересечения. Точку $B(B_1B_2)$ определим аналогично с помощью плоскости $\Phi'(\Phi'_1)$.

Пример 12. Найти линию пересечения плоскостей $\Omega(f\times h)$ и $\Theta(l, A)$ (рис. 28).

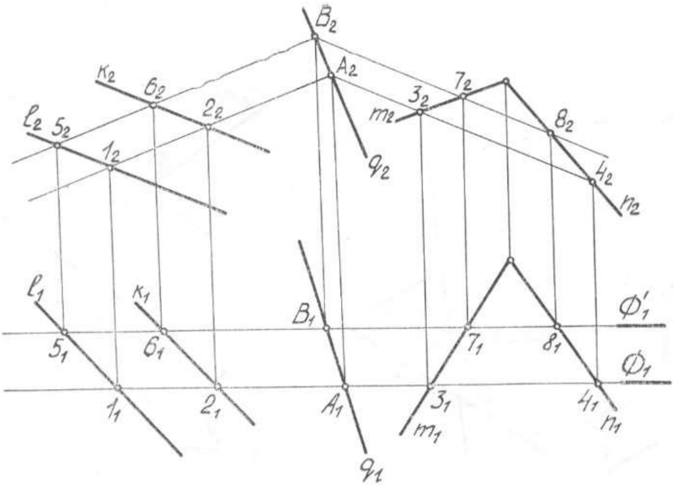


Рис. 27

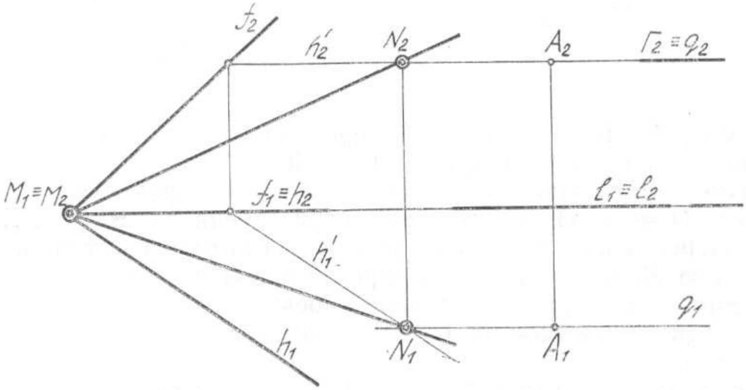


Рис. 28

Точка $M(M_1 \equiv M_2)$ является общей для трех прямых f, h и l, следовательно, она принадлежит обеим плоскостям Ω и Θ.

Вторую точку $N(N_1, N_2)$ определим, введя вспомогательную горизонтальную плоскость Γ (Γ_2), проходящую через точку A и пересекающую плоскость Ω по горизонтали h', а плоскость Θ по профильно-проецирующей прямой q, проходящей через точку A.

§ 7. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКИХ ФИГУР

Если прямая не параллельна плоскости, то она пересекается с ней в одной точке. Пусть дана плоскость Σ и прямая a (рис. 29). Для нахождения точки пересечения прямую a заключаем в плоскость Θ общего или частного положения, которая пересечется с плоскостью Σ по прямой b. В свою очередь, прямая b, пересекаясь с прямой a, определит искомую точку K.

Если при решении задач линии a и b окажутся параллельными, то это означает, что прямая a параллельна плоскости Σ.

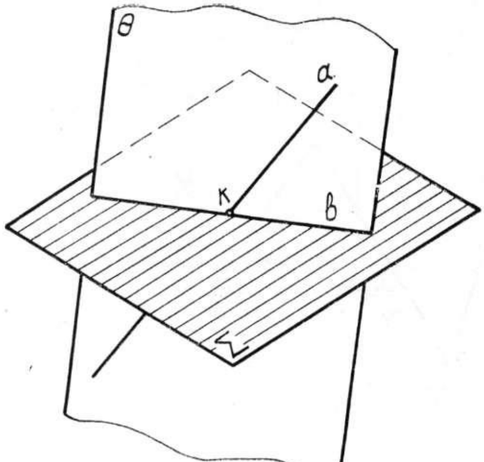


Рис. 29

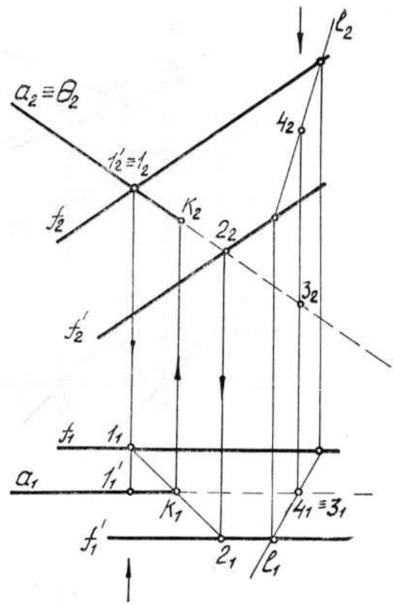


Рис. 30

Пример 13. Построить точку пересечения прямой a с плоскостью $\Sigma(f' \| f)$. Показать видимость прямой (рис. 30).

Прямую a заключаем во фронтально-проецирующую плоскость $\Theta(\Theta_2)$, тогда $\Theta_2 \equiv a_2$. Находим линию пересечения пл. Θ и пл. Σ — прямую 1, 2. Пересечение проекций прямой a_1а$1_1 2_1$ определит горизонтальную проекцую K_1 искомой точки. Фронтальную проекцию точки K находим по линии связи на фронтальной проекции прямой.

Видимость на плоскостях Π_1 и Π_2 определяется методом конкурирующих точек.

Конкурирующими относительно пл. Π_2 являются точки 1 и 1′. Они принадлежат различным прямым: $1 \in f$, находящейся в плоскости, а $1' \in a$, заданной прямой. О величине удаления этих точек от пл. Π_2 судим по расположению горизонтальных проекций точек. Видим, что точка 1′ находится дальше от пл. Π_2, следовательно, точка 1′ и прямая a на Π_2 будет видимой до точки K, после которой видимость меняется. На горизонтальной плоскости проекций явных конкурирующих точек нет, поэтому необходимо их построить, для чего в плоскости проводим произвольную прямую $l(l_1, l_2)$ так, чтобы с прямой a получить конкурирующие точки (3, 4). Определяем высоту их расположения по фронтальным проекциям этих точек. Устанавливаем, что точка $4 \in \Sigma$ выше, чем точка $3 \in a$, поэтому участок прямой до точки K будет невидимым.

Пример 14. Построить точку пересечения профильной прямой p (M, N) с плоскостью $\Sigma(f \times h)$ и показать видимость прямой (рис. 31).

Заключаем прямую p в профильную плоскость $\Psi(\Psi_1, \Psi_2)$, которая пересечет плоскость Σ по прямой 1, 2. Искомую точку K найдем, построив точку пересечения профильных проекций этих прямых.

Определение видимости на плоскости Π_2. Точки 3, 1 — конкурирующие относительно пл. Π_2. Расстояние этих точек до пл. Π_2 определяем по расположению профильных проекций точек 3 и 1. Видим, что точка $3 \in MN$ отстоит дальше от пл. Π_2, чем точка $1 \in \Sigma$. Следовательно,

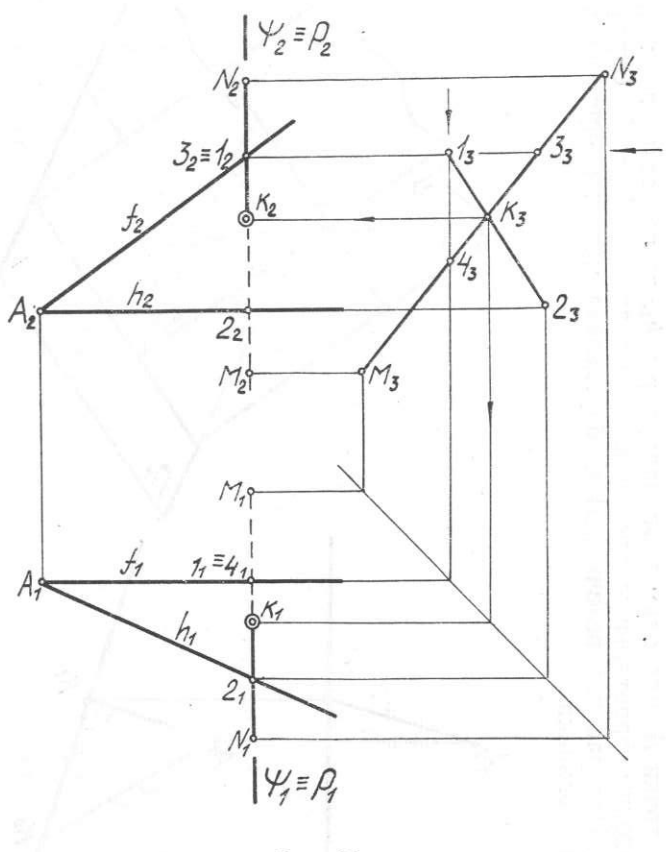

$\Psi_2 \equiv P_2$
N_2
N_3
$3_2 \equiv 1_2$
1_3
3_3
K_2
K_3
f_2
4_3
A_2
h_2
2_2
2_3
M_2
M_3
M_1
A_1
f_1
$1_1 \equiv 4_1$
K_1
h_1
2_1
N_1
$\Psi_1 \equiv P_1$

Рис. 31

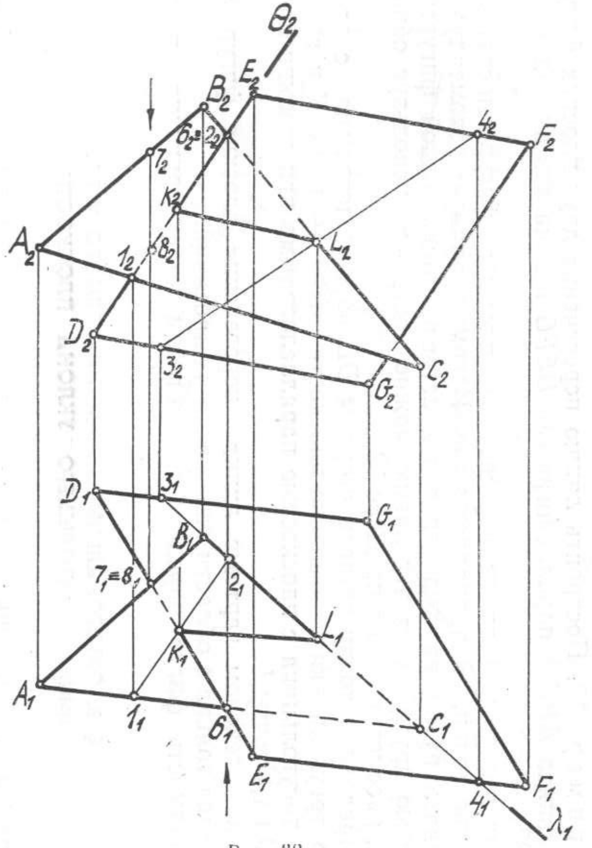

Θ_2
E_2
B_2
$6_2 \equiv 2_2$
4_2
F_2
7_2
K_2
L_2
A_2
1_2
8_2
D_2
3_2
G_2
C_2
D_1
3_1
G_1
B_1
$7_1 \equiv 8_1$
2_1
L_1
K_1
A_1
1_1
6_1
C_1
E_1
4_1
F_1
λ_1

Рис. 32

на пл. Π_2 отрезок прямой N_2K_2 видимый. Аналогично определяем видимость на пл. Π_1.

Пример 15. Построить линию пересечения двух плоских фигур: треугольника ABC и параллелограмма $DEFG$ и показать их видимость (рис. 32).

Для построения линии пересечения плоских фигур достаточно найти две точки, ей принадлежащие. Искомую прямую рекомендуется определять путем нахождения точек встречи сторон одной фигуры с плоскостью другой, хотя эту линию можно построить, используя общий способ, рассмотренный в примере 12.

Определяем точку встречи стороны DE параллелограмма с плоскостью треугольника с помощью плоскости $\Theta(\Theta_1)$ — точку K и стороны BC треугольника с плоскостью параллелограмма при помощи плоскости $\Lambda(\Lambda_1)$ точку L.

На комплексном чертеже линия пересечения плоских фигур KL проводится только в области наложения их проекций.

Видимость фигур определяется методом конкурирующих точек.

§ 8. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПРЯМОГО УГЛА. ЛИНИИ НАИБОЛЬШЕГО УКЛОНА ПЛОСКОСТИ

Прямой угол проецируется на какую-либо плоскость проекций без искажения, если хотя бы одна из его сторон параллельна этой плоскости проекций.

Пример 16. Определить расстояние от точки A до прямой h (рис. 33).

Расстояние от точки до прямой определяется перпендикуляром, опущенным из точки на эту прямую. Прямая $h(h_1, h_2)$ параллельна горизонтальной плоскости проекций, следовательно, прямой угол будет проецироваться на эту плоскость в натуральную величину.

Из точки A_1 проводим перпендикуляр к h_1, до пересечения в точке K_1. Находим фронтальную проекцию K_2. Соединяем A_2 с K_2. Отрезок $AK \perp h$. Натуральная величина A_1K_0 определена методом прямоугольного треугольника.

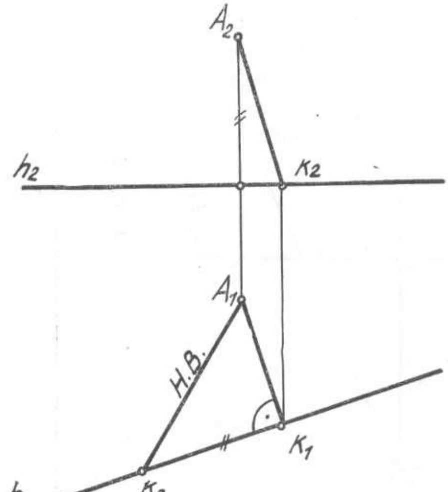


Рис. 33

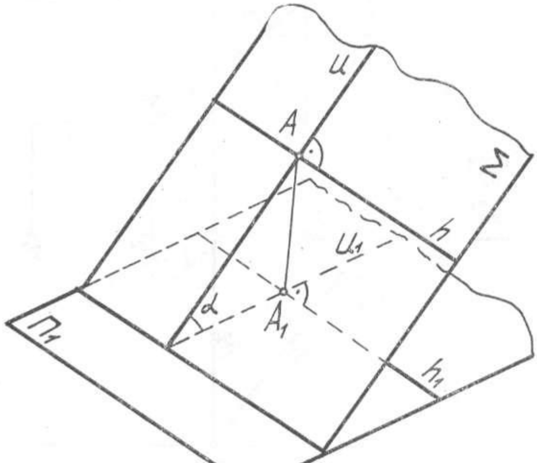


Рис. 34

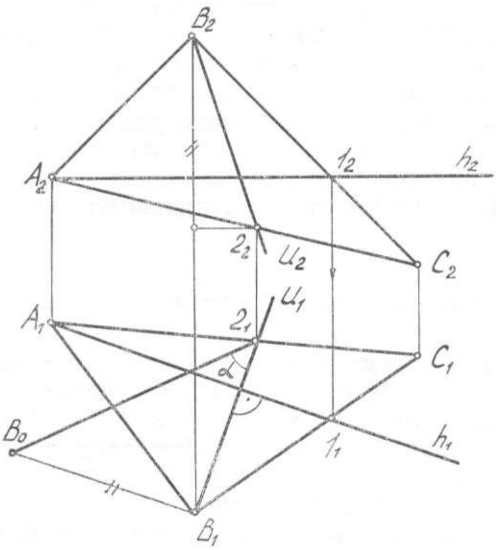


Рис. 35

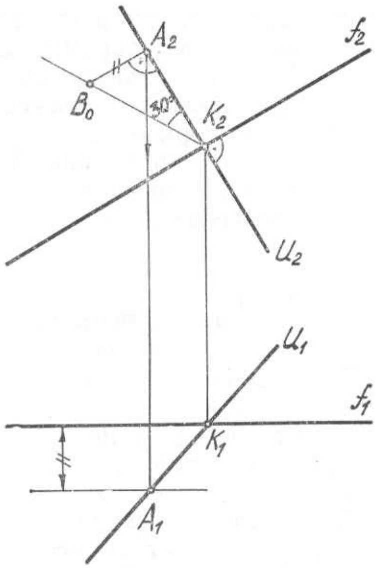


Рис. 36

Линиями наибольшего уклона плоскости называются прямые в плоскости, перпендикулярные линиям уровня этой плоскости. На рис. 34 в плоскости Σ проведена линия наибольшего уклона $u \perp h$. На основании свойств проецирования прямого угла, угол между u_1 и h_1 на плоскости Π_1 равен 90°. Поэтому *на комплексном чертеже горизонтальная проекция линии наибольшего уклона к* Π_1 *всегда перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали этой плоскости.*

Угол α, образованный между линией наибольшего уклона u и ее проекцией u_1, будет равен углу наклона плоскости Σ к горизонтальной плоскости проекций Π_1. Рассуждая подобным образом относительно линий наибольшего уклона плоскости, проведенных к плоскостям Π_2 и Π_3, т. е. перпендикулярных к фронталям и профильным прямым этой плоскости, будем иметь угол наклона плоскости Σ к плоскостям проекций Π_2 и Π_3.

Пример 17. Определить угол наклона плоскости Σ (ABC) к горизонтальной плоскости проекций (рис. 35).

Для определения искомого угла в плоскости Σ проведем линию наибольшего уклона к плоскости Π_1. Для этого предварительно проведем в плоскости горизонталь h, например, через точку A. Горизонтальная проекция линии наибольшего уклона u_1 будет перпендикулярна h_1. В пересечении u_1 с A_1C_1 получим точку 2_1. Исходя из условий принадлежности прямой u плоскости Σ, находим ее фронтальную проекцию u_2.

Методом прямоугольного треугольника определяем натуральную величину угла наклона α прямой u к горизонтальной плоскости проекций, который и будет искомым.

Пример 18. Через прямую f провести плоскость под углом 30° к плоскости проекций Π_2 (рис. 36).

На прямой f, являющейся фронталью, выберем произвольную точку K. Через фронтальную проекцию K_2 проведем фронтальную проекцию линии наибольшего уклона, т. е. $A_2K_2 \perp f_2$. Из точки K_2 также проведем вспомогательную линию под углом 30° к u_2, которая определяет направление гипотенузы прямоугольного треугольника. Выбрав на u_2 произвольную точку A_2, проведем из нее перпендикуляр к u_2 до пересечения с направлением гипотенузы в точке B_0. Треугольник $K_2A_2B_0$ — прямоугольный, в котором одним катетом является отрезок K_2A_2, а вторым — A_2B_0, представляющие разность расстояний точек K и A относительно фронтальной плоскости проекций, поэтому проводим линию, параллельную горизонтальной проекции f_1 на расстоянии, равном A_2B_0, и на ней находим проекцию A_1 точки A. Через точки K_1 и A_1 проводим горизонтальную проекцию u_1 линии наибольшего уклона u.

Две пересекающиеся прямые f и u определят собою искомую плоскость.

§ 9. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Если прямая перпендикулярна к плоскости общего положения, то на комплексном чертеже ее горизонтальная проекция перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали этой плоскости, а фронтальная проекция перпендикулярна фронтальной проекции фронтали плоскости.

Если плоскость является проецирующей, то прямая перпендикулярная к ней, будет линией уровня, и тогда на комплексном чертеже перпендикулярными будут вырожденная проекция плоскости и соответствующая проекция прямой.

Пример 19. Через точку A провести перпендикуляр l к плоскости Ω $(n \times m)$ и найти его основание (рис. 37).

В плоскости Ω проводим произвольную горизонталь h, например, через точки 1 и 2 и произвольную фронталь, например, через точки 3 и 4. Затем через A_1 проводим перпендикуляр l_1 к h_1, а через точку A_2 проводим перпендикуляр l_1 к f_2. Проекции прямой l_1 и l_2 определяют искомую прямую l, перпендикулярную плоскости Ω. Основанием перпендикуляра будет точка встречи K прямой l с плоскостью Ω, которая найдена с помощью фронтально-проецирующей плоскости Σ.

Пример 20. Построить проекции прямой l, проходящей через точку A $(A_1 A_2)$ и перпендикулярной плоскости Σ $(BCDE)$ (рис. 38).

Поскольку плоскость Σ содержит профильно-проецирующие прямые CD и BE, то она является профильно-проецирующей. Поэтому

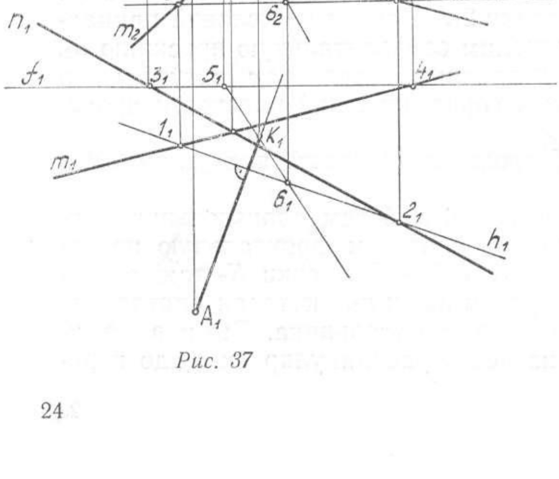


Рис. 37

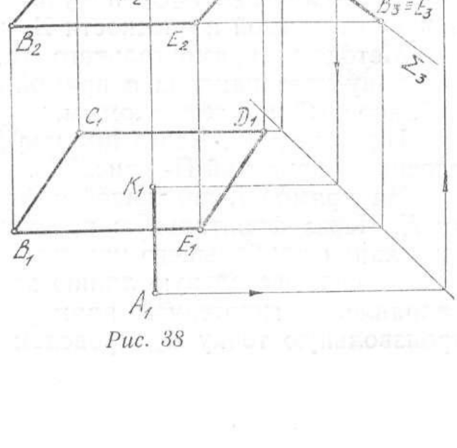


Рис. 38

искомый перпендикуляр будет профильной прямой, проходящей через точку A. Его горизонтальная и фронтальная проекции совпадут с вертикальной линией связи, а профильная проекция будет перпендикулярна к проекции плоскости Σ_3. Основание перпендикуляра на плоскости — точку K определим по ее профильной проекции K_3.

§ 10. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Так как прямой угол между прямыми общего положения на плоскости проекций проецируется с искажением, то найти его на комплексном чертеже без дополнительных построений не представляется возможным, поэтому прибегаем к графическим построениям, основанным на условии перпендикулярности прямой и плоскости.

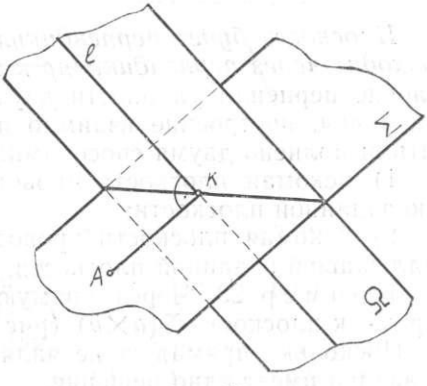


Рис. 39

Пусть требуется провести через точку A перпендикуляр к прямой общего положения l (рис. 39). Для этого через точку A проводится плоскость Σ, перпендикулярная l, и с помощью вспомогательной плоскости Ω находится точка пересечения K прямой l с плоскостью Σ. Соединяя точки A и K, получим отрезок, лежащий в плоскости и проходящий через основание перпендикуляра.

Следовательно, $AK \perp l$.

Пример 21. Из точки A опустить перпендикуляр на прямую $l(l_1, l_2)$ общего положения (рис. 40).

Через точку A проводим плоскость $\Sigma(h \times f)$, перпендикулярную к прямой l, т. е. $h_1 \perp l_1$ и $f_2 \perp l_2$. Находим точку встречи K прямой l с

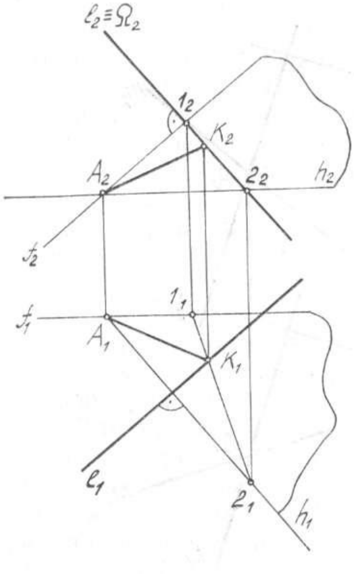


Рис. 40

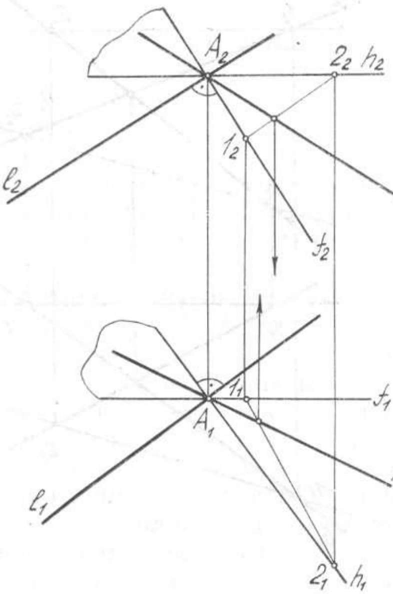


Рис. 41

плоскостью Σ при помощи фронтально-проецирующей плоскости Ω. Отрезок $AK \perp l$.

Пример 22. Определить, перпендикулярны ли пересекающиеся прямые l и m (рис. 41)?

Через точку пересечения прямых A проведем плоскость Σ $(h \times f)$, перпендикулярную к одной из прямых, например к l. Если вторая прямая m будет принадлежать этой плоскости, то прямые будут пересекаться под прямым углом. Проведя произвольную прямую 1—2 в плоскости Σ, видим, что прямая m не принадлежит этой плоскости. Значит, прямые l и m не перпендикулярны.

§ 11. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Плоскость будет перпендикулярна к другой плоскости, если она проходит через перпендикуляр к этой плоскости. Это положение и есть условие перпендикулярности двух плоскостей. На практике, при решении задач, построение взаимно перпендикулярных плоскостей может быть выполнено двумя способами:

1) искомая плоскость проводится через прямую, перпендикулярную заданной плоскости;

2) искомая плоскость проводится перпендикулярно прямой, принадлежащей заданной плоскости.

Пример 23. Через прямую m провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $\Sigma(a \times b)$ (рис. 42).

Поскольку прямая m не является перпендикуляром к плоскости Σ, то задача имеет одно решение.

На прямой m берем произвольную точку A и через нее проводим перпендикуляр l к плоскости Σ. Проекции перпендикуляра l_1 и l_2 на комплексном чертеже должны быть перпендикулярны, соответственно, горизонтальной проекции горизонтали h_1 и фронтальной проекции

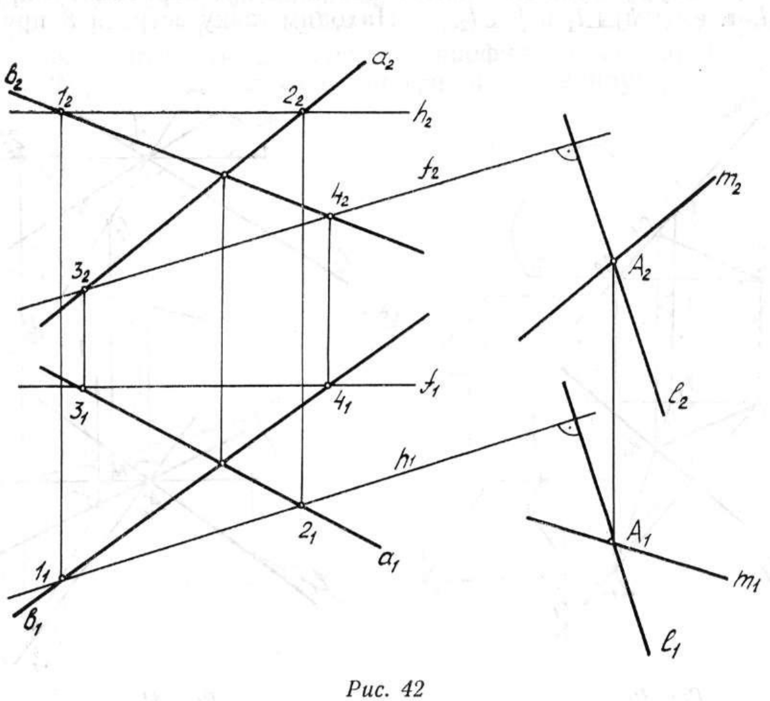


Рис. 42

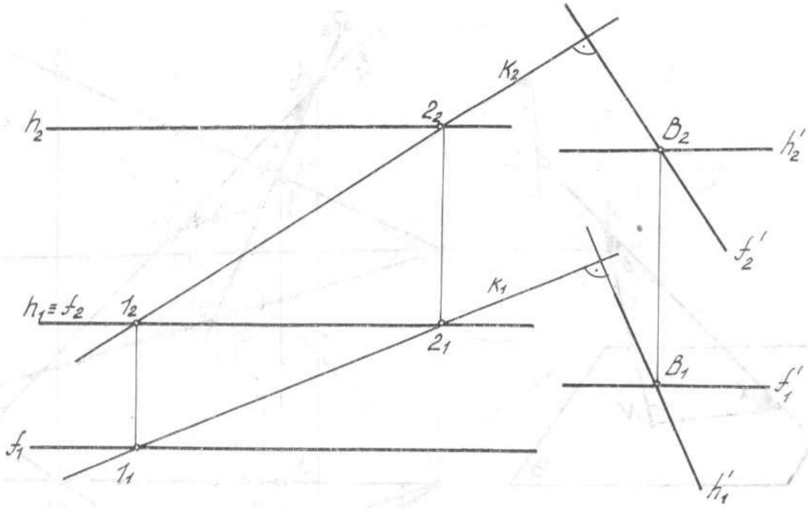


Рис. 43

фронтали f_2, построенных в плоскости Σ. Пересекающиеся прямые линии m и l и определят искомую плоскость.

Пример 24. Через точку B провести плоскость общего положения, перпендикулярную к плоскости $\Theta(h\|f)$ (рис. 43).

Эта задача имеет бесчисленное количество решений. Дадим одно из них. В плоскости Θ проведем произвольную прямую линию общего положения k, а через точку B горизонталь h' и фронталь f', у которых проекции $h_1' \perp k_1$ и $f_2' \perp k_2$. Согласно известных положений, прямые линии h' и f' определят искомую плоскость, перпендикулярную к плоскости Θ.

§ 12. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Пример 25. Построить проекции угла между прямой общего положения l и плоскостью $\Theta(f \times m)$ (рис. 44).

Задача решается следующим образом:

1) находится точка пересечения K прямой l с плоскостью Θ;

2) из произвольной точки A, взятой на прямой l, опускается перпендикуляр на плоскости Θ и находится точка N пересечения его с этой плоскостью;

3) найденные точки соединяются друг с другом, и определяется проекция KN отрезка AK прямой l на плоскость Θ. В полученном прямоугольнике угол α является искомым.

На комплексном чертеже проекции угла α_1 и α_2 определены с помощью графических построений в указанной выше последовательности. Для проведения перпендикуляра к плоскости Θ в ней предварительно построена горизонталь h, а точки $K(K_1, K_2)$ и $N(N_1, N_2)$ найдены с помощью вспомогательных проецирующих плоскостей Σ и Ω. Углы между прямыми A_1K_1 и N_1K_1, A_2K_2 и N_2K_2 являются искомыми. Указанная задача может быть также решена, если определить угол β между прямой l и перпендикуляром к плоскости Θ. Тогда угол α будет равен $\alpha = 90° - \beta$.

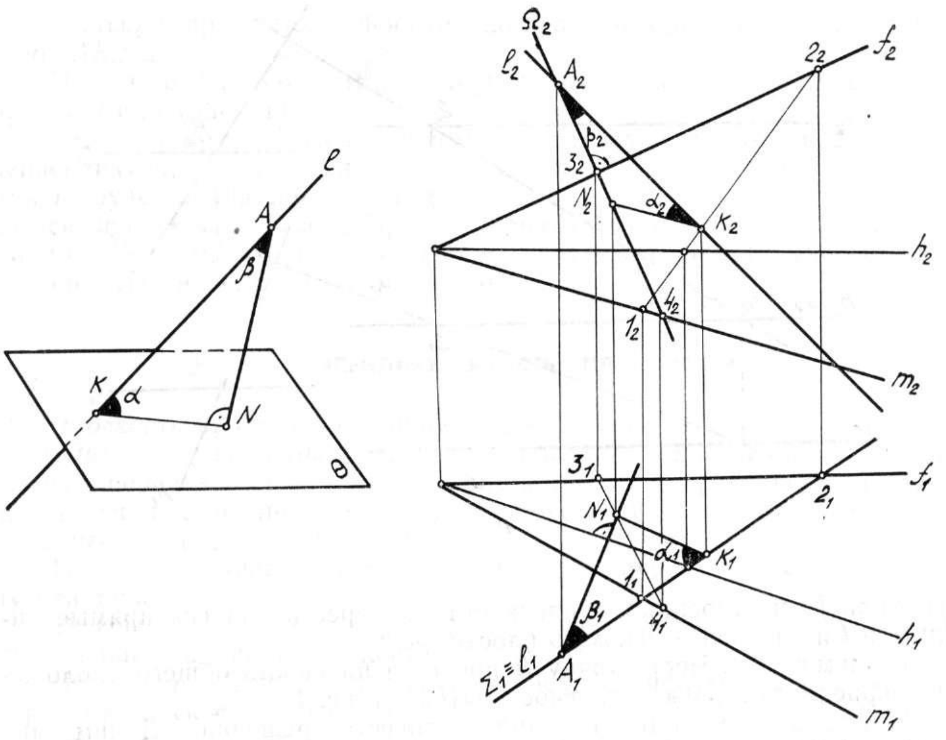


Рис. 44

Решение задачи вторым способом обладает тем преимуществом, что графические построения на чертеже упрощаются.

При необходимости определить натуральную величину углов α и β можно воспользоваться методом прямоугольного треугольника, определить длину сторон треугольника ANK и построить его натуральный вид, либо воспользоваться одним из способов преобразований проекций.

§ 13. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Угол между плоскостями измеряется линейным углом двугранного угла между этими плоскостями. Величина его может быть найдена непосредственно путем определения линейного угла φ или через дополнительный угол ω (рис. 45).

Линейный угол двугранного угла определяется следующим образом:

1) находится линия пересечения плоскостей MN, являющаяся ребром двугранного угла;

2) через произвольную точку A на ребре проводится плоскость Σ, перпендикулярная к ребру;

3) находится линия пересечения плоскости Σ с каждой из заданных плоскостей Θ и Ω, полученные прямые линии и определят искомый угол φ между плоскостями.

Пример 26. Определить проекции угла между плоскостями $\Theta(PMN)$ и $\Omega(MNQ)$ (рис. 46).

Заданные плоскости имеют общую прямую MN, являющуюся ли-

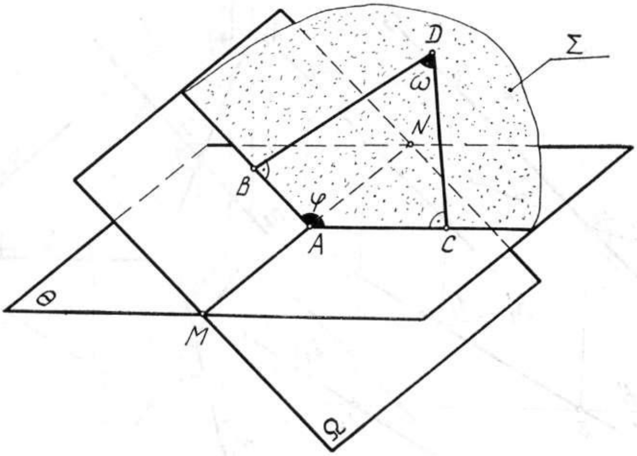


Рис. 45

нией их пересечения. Плоскость Σ, перпендикулярная к этой прямой, проведена через произвольную точку A прямой и выражена на комплексном чертеже горизонталью h и фронталью f. С помощью вспомогательных плоскостей Λ и Δ найдены точки B и C пересечения прямых MQ и MP с плоскостью Σ. Полученные прямые AB и AC являются линиями пересечений заданных треугольников с плоскостью Σ и определяют искомый угол $\varphi(\varphi_1, \varphi_2)$ между ними.

Пример 27. Построить проекции угла между плоскостями общего положения $\Theta(l \| k)$ и $\Omega(h \times f)$ (рис. 47).

Решим эту задачу вторым способом. В этом случае находить линию пересечения плоскостей нет необходимости. Из произвольной точки D

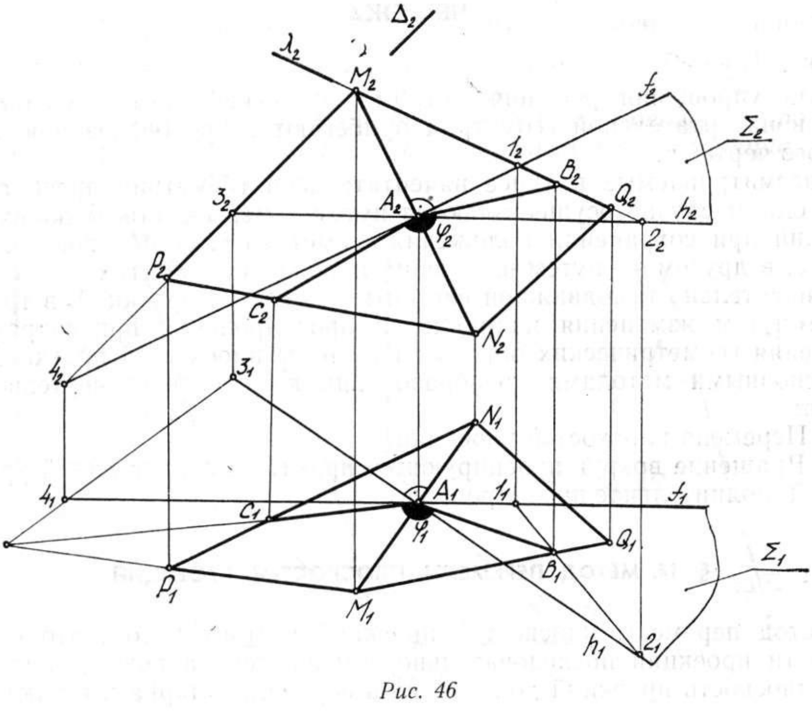


Рис. 46

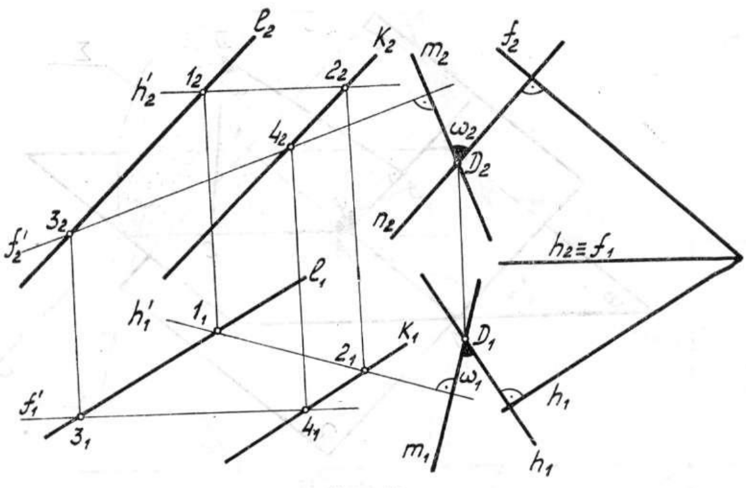


Рис. 47

в пространстве проводим перпендикуляры m и n к плоскостям Θ и Ω. Они определят плоскость, перпендикулярную к ним, и, следовательно, w_1 и w_2 будут проекциями искомого угла. Для нахождения натуральных величин углов φ или ω можно воспользоваться методом прямоугольного треугольника или одним из способов преобразования комплексного чертежа.

Глава III. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

Для упрощения решения метрических и некоторых позиционных задач в начертательной геометрии прибегают к преобразованию комплексного чертежа.

Рассматриваемые в курсе начертательной геометрии преобразования в одном случае осуществляются путем замены системы плоскостей проекций при сохранении положения геометрических образов в пространстве, в другом — путем изменения положения геометрических образов относительно неподвижной системы плоскостей проекций, в третьем случае путем изменения направления проецирования при сохранении положения геометрических образов и системы плоскостей проекций.

Основными методами преобразования комплексного чертежа являются:

1. Перемена плоскостей проекций.
2. Вращение вокруг проецирующих прямых и вокруг линий уровня.
3. Дополнительное проецирование.

§ 14. МЕТОД ПЕРЕМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Метод перемены плоскостей проекций состоит в том, что старые плоскости проекций последовательно заменяются на новые, при этом новая плоскость проекций должна быть перпендикулярна к остающейся

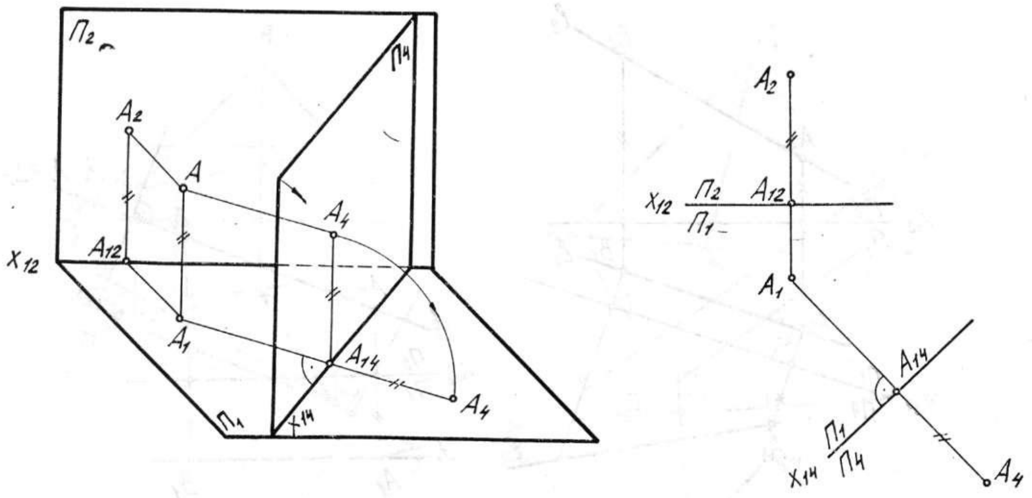


Рис. 48

плоскости проекций. Заданные в пространстве геометрические образы своего положения не изменяют.

Рассмотрим замену фронтальной плоскости проекций $П_2$ на новую плоскость $П_4$ (рис. 48), перпендикулярную $П_1$: их линия пересечения будет являться осью проекций x_{14} в новой системе $\frac{П_1}{П_4}$.

Совместив плоскость $П_4$ с $П_1$ вращением вокруг оси x_{14}, получим проекцию точки A_4 на расстоянии, от оси x_{14}, равном A_4A_{14}. Тогда $A_4A_{14}=AA_1=A_2A_{12}$, т. е. *расстояние новой фронтальной проекции точки от новой оси равно расстоянию заменяемой старой фронтальной проекции этой точки от старой оси проекций.*

Рассмотрим замену горизонтальной плоскости проекций на плоскость $П_4$ (рис. 49), перпендикулярную $П_2$, их линия пересечения будет являться осью проекций x_{24} в новой системе $\frac{П_2}{П_4}$. Совместив плоскость $П_4$ с $П_2$ вращением вокруг оси x_{24}, получим проекцию точки A_4 на расстоянии от оси x_{24}, равном A_4A_{24}. При этом $A_4A_{24}=AA_2=A_1A_{12}$, т. е. *расстояние новой горизонтальной проекции точки от новой оси проекций равно расстоянию заменяемой старой горизонтальной проекции этой точки от старой оси проекций.*

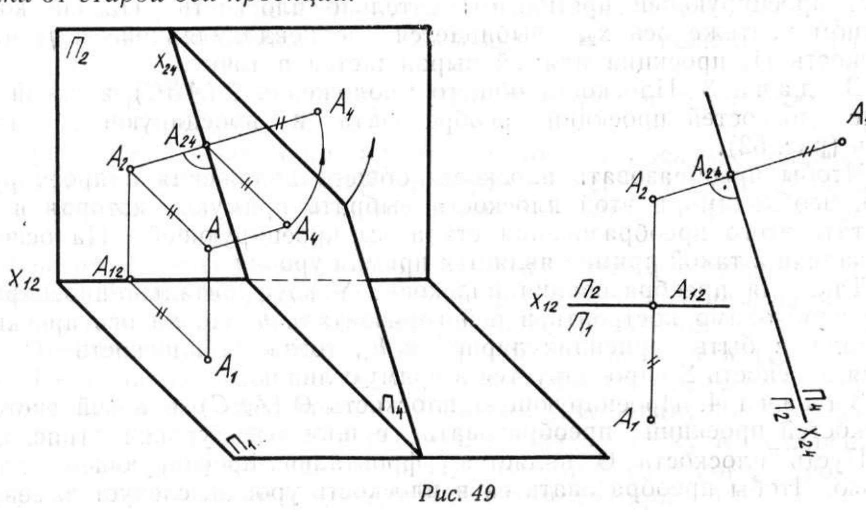


Рис. 49

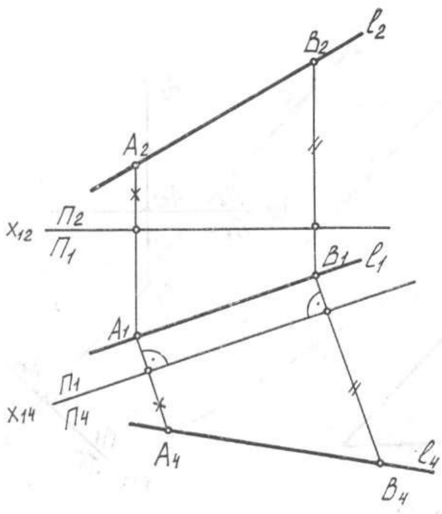


Рис. 50

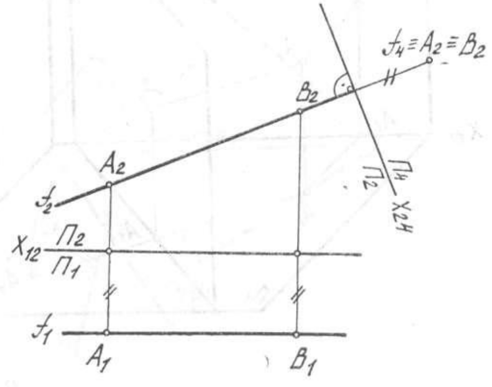


Рис. 51

На указанных зависимостях основывается построение новых проекций при перемене двух и более плоскостей проекций.

Решение различных задач методом перемены плоскостей проекций сводится к решению четырех основных задач.

Задача 1. Прямую общего положения $l(l_1, l_2)$ преобразовать в новой системе плоскостей проекций в прямую уровня (рис. 50).

Чтобы преобразовать данную прямую в прямую уровня, достаточно заменить одну из плоскостей проекций, например, плоскость Π_2 на новую плоскость Π_4, перпендикулярную плоскости Π_1 и параллельную l. На комплексном чертеже новая ось проекций x_{14} выбирается параллельной горизонтальной проекции прямой l_1 и строится новая проекция прямой l_4. Полученная прямая в новой системе будет фронталью.

Задача 2. Прямую уровня $f(f_1, f_2)$ преобразовать в новой системе плоскостей проекций в проецирующую прямую (рис. 51).

Пусть прямая f в системе плоскостей проекций $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ является фронталью. Заменим плоскость проекций Π_1 на новую плоскость Π_4, перпендикулярную к прямой f. Тогда в новой системе $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$ прямая f будет проецирующей прямой относительно плоскости Π_4. На комплексном чертеже ось x_{24} выбирается перпендикулярной к f_2 и на плоскость Π_4 проекция прямой вырождается в точку.

Задача 3. Плоскость общего положения $\Sigma(ABC)$ в новой системе плоскостей проекций преобразовать в проецирующую плоскость (рис. 52).

Чтобы преобразовать плоскость общего положения в проецирующую, необходимо в этой плоскости выбрать прямую, которая в результате этого преобразования стала бы проецирующей. На основании задачи 2 такой прямой является прямая уровня.

Так, для преобразования плоскости Σ во фронтально-проецирующую необходимо построить в ней горизонталь h. Новая ось проекций x_{14} должна быть перпендикулярной к h_1, тогда на плоскость Π_4 задания плоскость Σ спроецируется в прямую линию.

Задача 4. Проецирующую плоскость Θ (ABC) в новой системе плоскостей проекций преобразовать в плоскость уровня (рис. 53).

Пусть плоскость Θ является фронтально-проецирующей плоскостью. Чтобы преобразовать ее в плоскость уровня, следует заменить

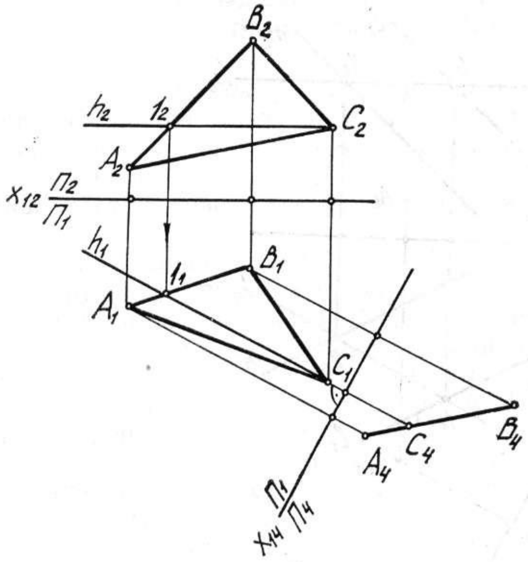


Рис. 52

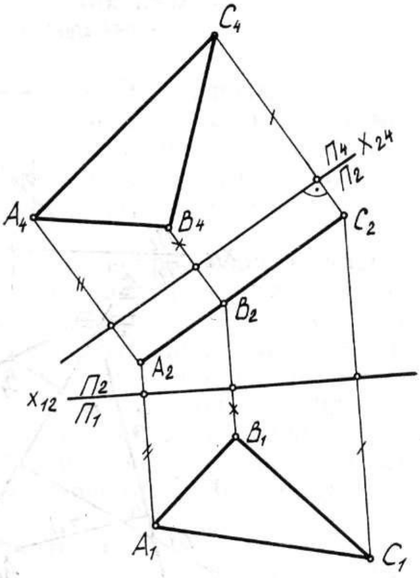


Рис. 53

плоскость проекций Π_1 на новую плоскость Π_4, параллельную данной плоскости Θ. В системе плоскостей проекций $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$ плоскость Θ будет плоскостью уровня относительно плоскости Π_4. На комплексном чертеже новая ось проекций x_{24} выбирается параллельной фронтальной проекции $A_2B_2C_2$ и строится новая проекция на Π_4 $(A_4B_4C_4)$.

Для решения некоторых задач требуется перемена одной плоскости проекций, для решения других — последовательная перемена двух и трех плоскостей проекций.

Пример 28. Определить расстояние от точки A до плоскости Σ $(l \| m)$ (рис. 54).

Решение данного примера сводится к решению третьей основной задачи. Для этого проведем в плоскости Σ произвольную горизонталь h и заменим плоскость Π_2 на плоскость Π_4, перпендикулярную этой горизонтали. На плоскости Π_4 горизонталь будет проецирующей (h_4).

Взяв произвольную точку B (B_1, B_2) на прямой l и спроецировав ее на плоскость Π_4, преобразуем исходную плоскость в проецирующую. Расстояние от точки A_4 до Σ_4 будет искомой величиной расстояния.

Пример 29. Через точку A провести прямую m, пересекающую прямую l под углом $\alpha=45°$ (рис. 55).

Прямую l и точку A примем за плоскость и последовательной переменной плоскостей проекций преобразуем ее сначала в проецирующую, а затем в плоскость уровня, т. е. решим 3 и 4 основные задачи.

Проведем через точку A фронталь f и заменим плоскость Π_1 на плоскость Π_4, перпендикулярную этой фронтали. Возьмем на прямой l произвольную точку B и, спроецировав ее и фронталь на Π_4, получим проецирующую плоскость. Затем заменим плоскость Π_2 на плоскость Π_5, параллельную (A, l). Плоскость (A, l) относительно плоскости Π_5 стала плоскостью уровня. Проведем через точку A_5 прямую m_5 под углом 45° к прямой l. В пересечении получим точку K_5. Спроецировав ее на плоскости проекций Π_1 и Π_2 и соединив с точкой A, получим прямую m, проведенную под заданным углом α к прямой l.

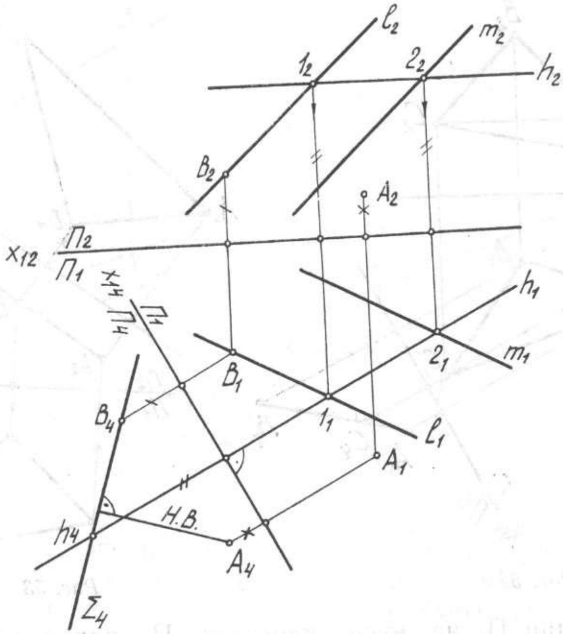

l2
m2
12
22
h2
B2
A2
X12
П2
П1
X14
П1
П4
h1
B1
21
m1
B4
11
l1
A1
H.B.
h4
A4
Σ4

Рис. 54

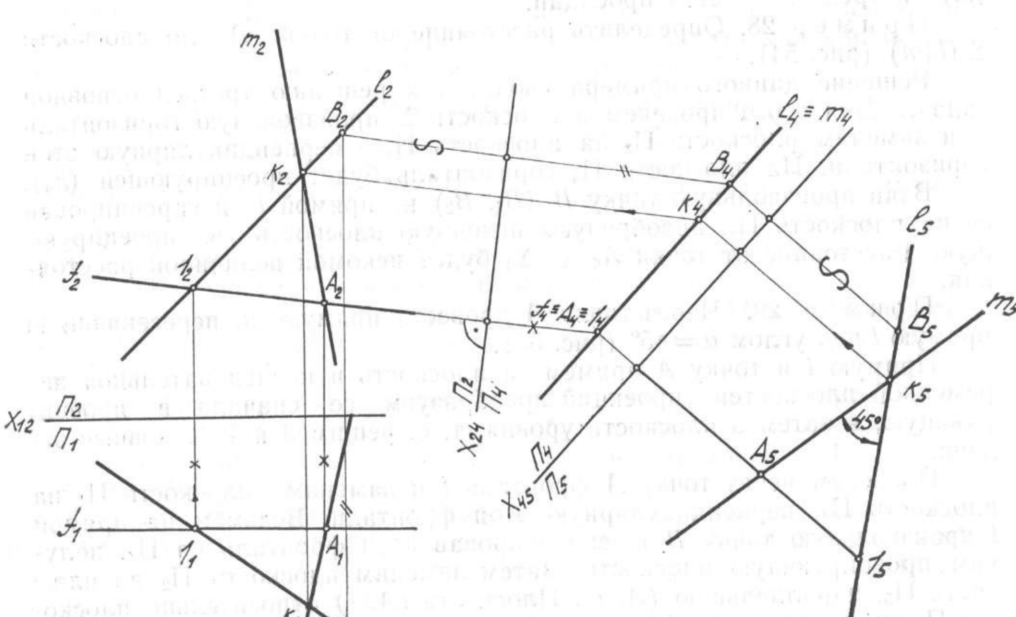

m2
l2
B2
l4 ≡ m4
K2
B4
K4
l5
f2
12
A2
f4 ≡ A4 ≡ 14
m5
B5
K5
П2
П4
X24
X12
П2
П1
45°
П4
П5
X45
A5
f1
11
A1
15
K1
m1
B1
l1

Рис. 55

§ 15. ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ПРОЕЦИРУЮЩИХ ПРЯМЫХ. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ

I. *Вращение вокруг проецирующих прямых.* Этот способ преобразования комплексного чертежа предполагает неизменность системы плоскостей проекций, а рассматриваемый геометрический объект путем вращения вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям проекций, приводится в новое положение, для которого строится комплексный чертеж.

При вращении точки $A(A_1, A_2)$ (рис. 56) вокруг горизонтально-проецирующей прямой $i(i_1, i_2)$ траекторией вращения ее является окружность, плоскость которой называется плоскостью перемещения точки. Эта плоскость Θ горизонтальная и перпендикулярна оси вращения, поэтому *траектория вращения точки спроецируется на плоскость* Π_1 *в виде окружности радиуса* R, *равного расстоянию точки от оси вращения, а на плоскость* Π_2 *в виде отрезка прямой, перпендикулярного линиям связи и длиной* $2R$. При этом угол, на который точка повернулась вокруг оси, спроецируется на плоскость Π_1 в натуральную величину.

Рассуждая аналогично, можно заключить, что *траектория вращения точки вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекции* Π_2, *спроецируется на нее в виде окружности радиуса* R *и на плоскость* Π_1 *в виде отрезка прямой, перпендикулярного линиям связи и длиной* $2R$.

Вращение прямой линии и фигуры вокруг проецирующих прямых сводится к вращению точек, принадлежащих этим объектам.

Пусть отрезок $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ (рис. 57, *а*) необходимо повернуть по часовой стрелке на некоторый угол φ относительно оси $i(i_1, i_2)$.

Повернем точку A_1 и B_1 на горизонтальной плоскости на один и тот же угол φ в указанном направлении $\Delta A_1i_1B_1 = \Delta A_1'\,i_1B'_1$, т. к. $\angle A_1i_1B_1 = \angle A_1'\,i_1B_1'$ (они получены вычитанием из равных углов φ одного и того же угла δ), а прилежащие стороны равны между собой по построению. Отсюда следует, что $A'B_1' = A_1B_1$.

При вращении прямой или фигуры относительно оси, перпендикулярной какой-либо плоскости, ее проекция на эту плоскость, изменяя положение, не изменит своей величины.

Опираясь на это свойство, задача о вращении отрезка упрощается и сводится к вращению одной точки K, принадлежащей данному

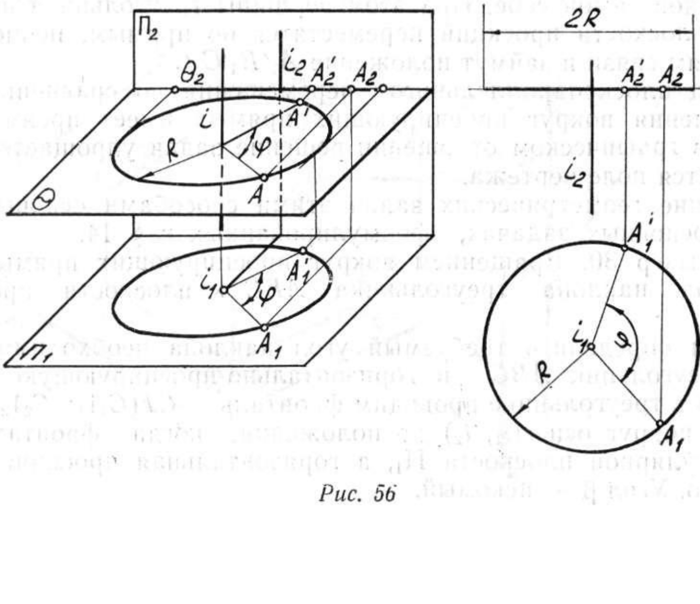


Рис. 56

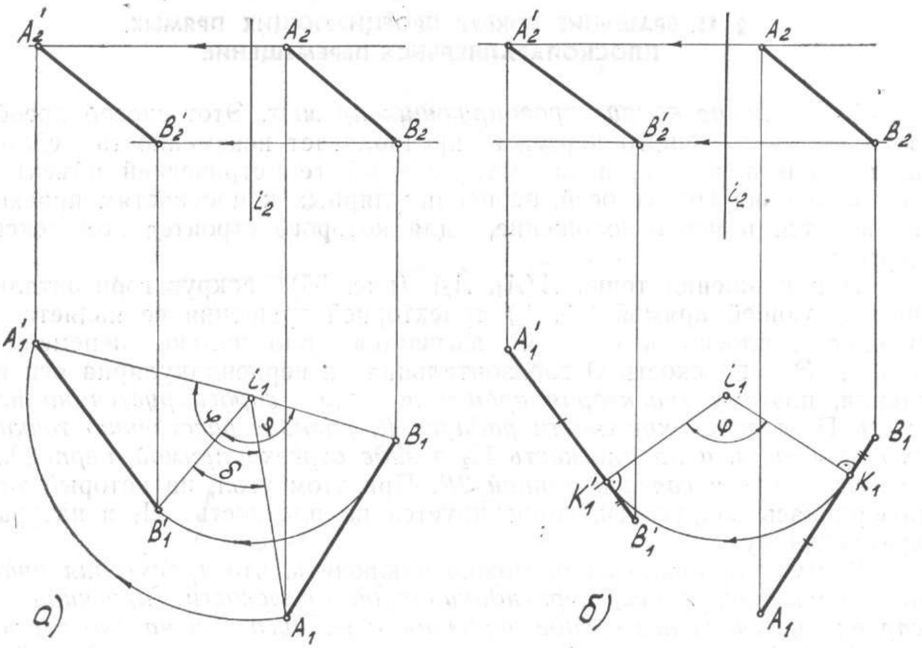


Рис. 57

отрезку, на заданный угол φ (рис. 57, *б*). Точка *K* находится на кратчайшем расстоянии от оси вращения *i*.

2. *Плоскопараллельное перемещение* можно рассматривать как вращение вокруг проецирующих прямых, когда точки геометрического объекта перемещаются во взаимно параллельных плоскостях, а положение осей на комплексном чертеже не указывается.

При плоскопараллельном перемещении геометрического объекта одна из его проекций, оставаясь равной самой себе, перемещается в плоскости проекции, другая проекция точек объекта перемещается по прямым, перпендикулярным линиям связи.

Пусть необходимо переместить ΔABC (рис. 58) относительно плоскости Π_2 в новое положение. Тогда фронтальная проекция $A_2B_2C_2$ треугольника переместится в нужное нам положение $A_2'B_2'C_2'$, оставаясь равной самой себе. При этом вершины треугольника на горизонтальной плоскости проекций переместятся по прямым, перпендикулярным линиям связи и займут положение $A_1'B_1'C_1'$.

Метод плоскопараллельного перемещения по сравнению с методом вращения вокруг проецирующих прямых имеет преимущество в том, что в графическом отношении решение задач упрощается и лучше используется поле чертежа.

Решение геометрических задач этими способами основывается на четырех основных задачах, сформулированных в § 14.

Пример 30. Вращением вокруг проецирующих прямых определить угол наклона треугольника *ABC* к плоскости проекций Π_2 (рис. 59).

Чтобы определить требуемый угол наклона необходимо преобразовать треугольник *ABC* в горизонтально-проецирующую плоскость. Для этого в треугольнике проводим фронталь $C1$ (C_11_1; C_21_2), и вращаем его вокруг оси $i(i_1, i_2)$ до положения, когда фронталь станет перпендикулярной плоскости Π_1, а горизонтальная проекция выродится в линию. Угол β — искомый.

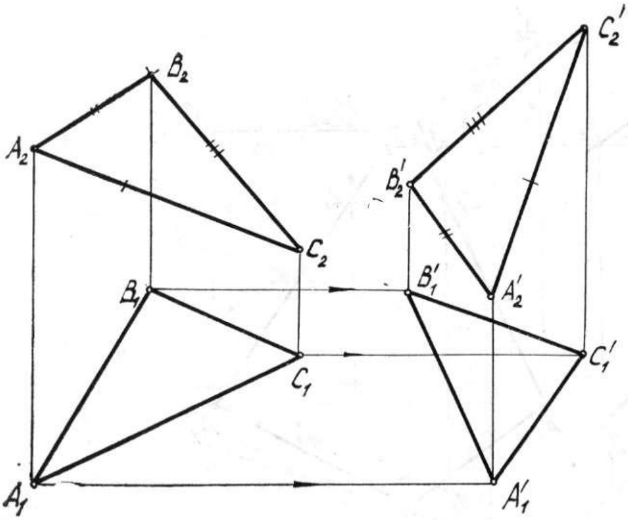


Рис. 58

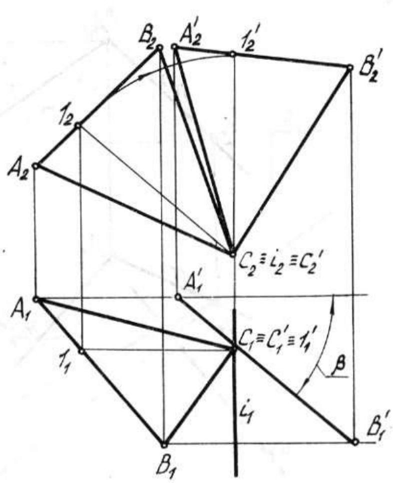


Рис. 59

Пример 31. Определить расстояние между параллельными прямыми m и n (рис. 60).

На основании рассмотренного выше вращения отрезков прямых линий (рис. 57), данные параллельные прямые сначала преобразуем в прямые линии уровня, а затем в прямые проецирующие. Указанные преобразования осуществляются вращением прямых вокруг оси $i\,(i_1,\ i_2)$, перпендикулярной к плоскости Π_2 и проходящей через точку D, а затем вокруг оси $i'\,(i_1',\ i_2')$, перпендикулярной к плоскости Π_1, взятой вне прямых. Расстояние d будет искомым.

Пример 32. Способом плоскопараллельного перемещения определить угол между пересекающимися прямыми m и n (рис. 61).

Искомый угол определяется непосредственно из чертежа в том случае, если плоскость, заданная прямыми m и n, станет плоскостью уровня. Это достигается с помощью двух перемещений:

1) плоскость общего положения перемещением параллельно Π_1 приводится в положение фронтально-проецирующей плоскости, для чего горизонталь 1—2 ставится в положение фронтально-проецирую-

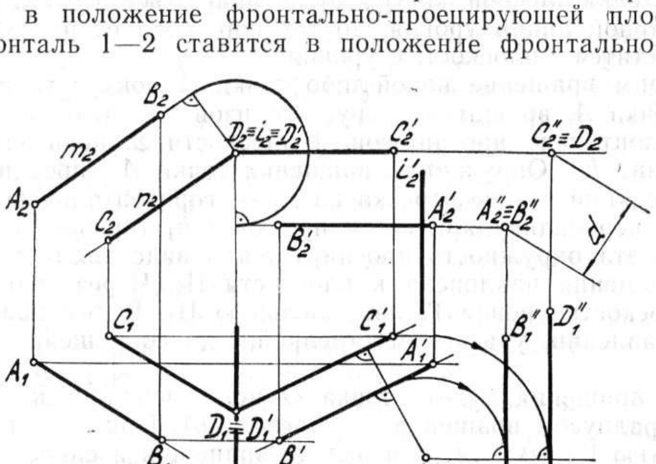


Рис. 60

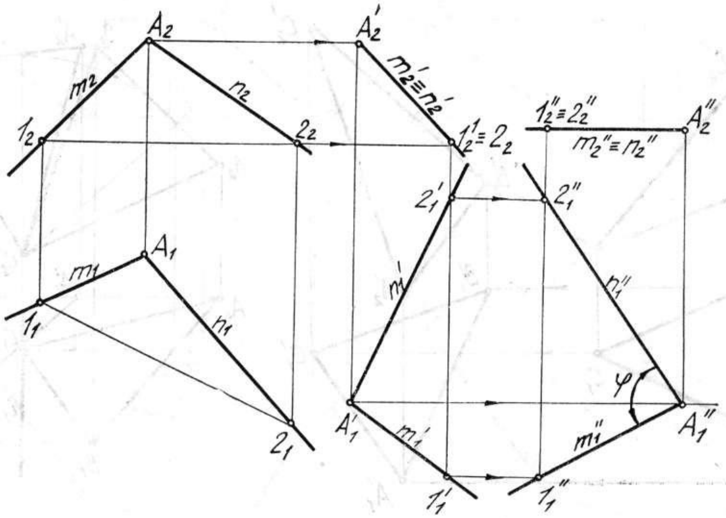


Рис. 61

щей прямой, т. е. решается третья задача преобразования;

2) проецирующая плоскость, перемещением параллельно Π_2 приводится в положение горизонтальной плоскости уровня (задача четвертая преобразования комплексного чертежа).

Угол φ будет искомым.

§ 16. ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ЛИНИЙ УРОВНЯ (СПОСОБ СОВМЕЩЕНИЯ)

При вращении вокруг линий уровня плоская фигура совмещается с плоскостью уровня, проходящей через эту прямую. В этом положении она проецируется на соответствующую плоскость проекций без искажения.

Каждая точка плоской фигуры будет вращаться в своей плоскости, перпендикулярной линии уровня, до тех пор, пока ее радиус вращения не совместится с плоскостью уровня.

Рассмотрим вращение какой-либо точки A вокруг горизонтали h (рис. 62). Точка A, вращаясь вокруг горизонтали h, опишет окружность в горизонтально проецирующей плоскости Σ, перпендикулярной к оси вращения h. Окружность вращения точки A проецируется на плоскость проекций в виде отрезка на Σ_1 — горизонтальную проекцию плоскости Σ, перпендикулярную к проекции h_1 горизонтали h. На плоскость Π_2 эта окружность проецируется в виде эллипса, так как плоскость вращения наклонена к плоскости Π_2. Через горизонталь h проведем плоскость уровня Γ, параллельную Π_1. Будем вращать точку A в направлении, указанном стрелкой, до совмещения с плоскостью Γ.

Центром вращения будет точка O пересечения оси h с плоскостью Σ, а радиусом вращения — отрезок OA. При совмещении точки с плоскостью Γ совместится и радиус вращения и спроецируется на Π_1 в натуральную величину. Получим совмещенное положение точки A' и ее горизонтальную проекцию A_1', которая будет располагаться на Σ_1 и отстоять от O_1 на расстоянии, равном радиусу вращения точ-

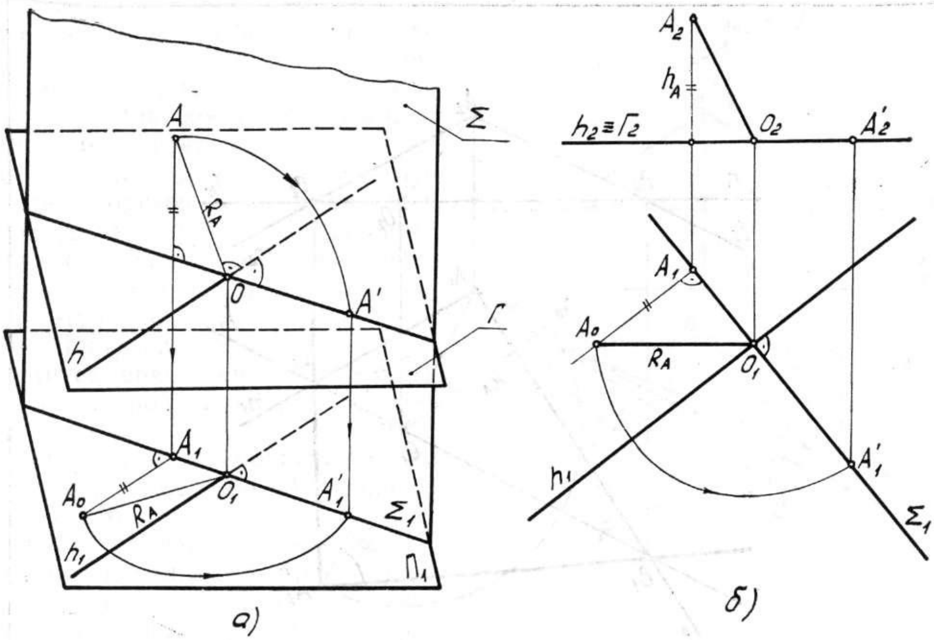


Рис. 62

ки A. Натуральную величину радиуса вращения A можно определить по способу прямоугольного треугольника.

Из изложенного вытекает, что *при вращении точки вокруг горизонтали ее горизонтальная проекция перемещается по прямой, перпендикулярной горизонтальной проекции горизонтали и после совмещения точки с плоскостью уровня будет отстоять от горизонтальной проекции центра вращения на расстоянии, равном радиусу вращения точки.*

На рис. 62, б показаны построения рассмотренного преобразования на комплексном чертеже. Проводим через проекцию A_1 точки A прямую $\Sigma_1 \perp h_1$. В пересечении Σ_1 и h_1 находим горизонтальную проекцию O_1 центра вращения O. Построив ее фронтальную проекцию O_2, получим A_1O_1 и A_2O_2 — проекции радиуса вращения точки A.

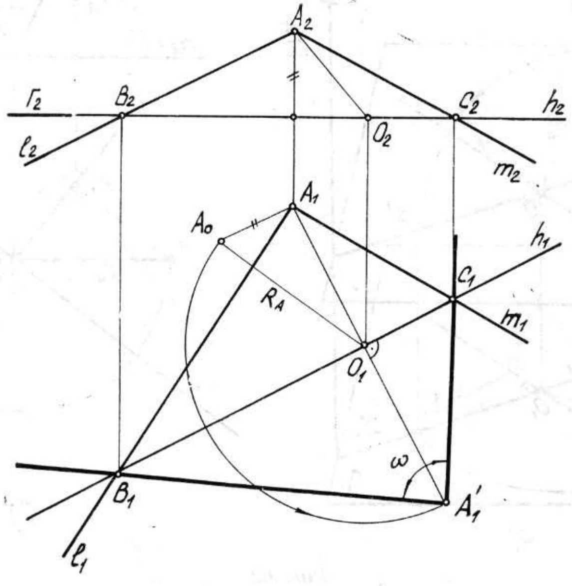
Натуральную величину радиуса вращения находим при помощи прямоугольного треугольника $A_1O_1A_0$, катетами которого являются горизонтальная проекция A_1O_1 радиуса вращения и высота h_A точки относительно плоскости Г. Откладывая на прямой Σ_1 от точки O_1 натуральную величину радиуса вращения R_A, получим горизонтальную проекцию A_1' совмещенного положения точки, а затем и ее фронтальную проекцию A_2'.

Вращение точки вокруг фронтали и профильной прямой производится аналогичным образом.

При вращении плоскости вокруг ее прямой уровня можно рассматривать вращение только одной ее произвольной точки до совмещения с плоскостью уровня этой прямой.

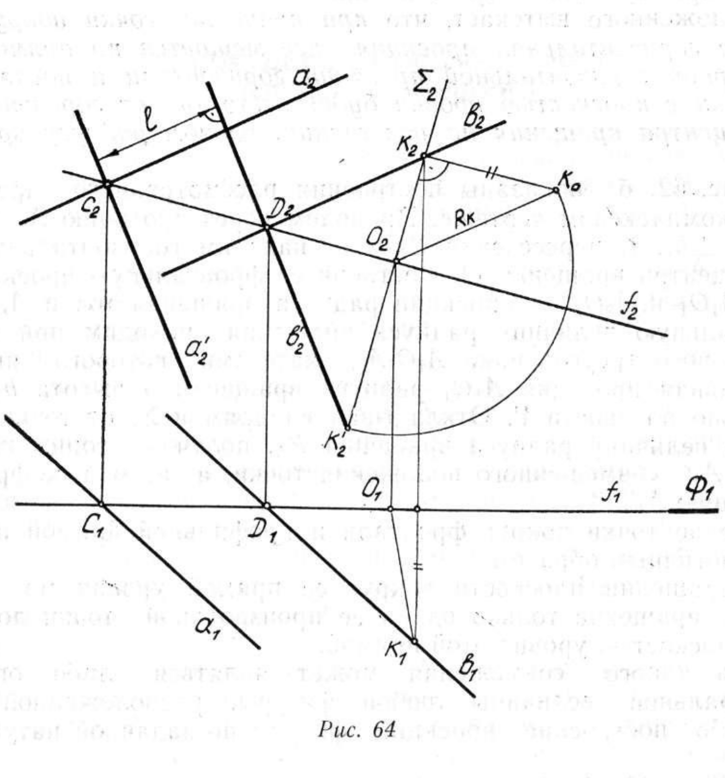
Целью такого совмещения может являться либо определение натуральной величины любой фигуры, расположенной в плоскости, либо построение проекций фигуры по заданной натуральной величине.

П р и м е р 33. Определить натуральную величину угла между пересекающимися прямыми m и l (рис. 63).



A2
Г2
B2
O2
C2
h2
ℓ2
m2
A1
A0
h1
C1
RA
m1
O1
ω
B1
A'1
ℓ1

Рис. 63



a2
Σ2
ℓ
B2
K2
K0
C2
D2
RK
O2
f2
b2
a'2
K'2
O1
f1
Ф1
C1
D1
a1
K1
b1

Рис. 64

Величина угла может быть определена, если плоскость, определяемая заданными прямыми, станет плоскостью уровня. Этого можно достигнуть, если ее повернуть вокруг горизонтали. В плоскости прямых m и l проводим горизонталь и вращаем вокруг нее точку A — вершину искомого угла до совмещения с плоскостью Г, проходящей через эту горизонталь.

Построение проекций центра, радиуса вращения, а также горизонтальной проекции A_1' совмещенного положения точки A, аналогично рассмотренным на рис. 62, б. Соединив A_1' с проекциями B_1 и C_1 неподвижных точек B и C, лежащих на оси вращения, получим $\angle B_1A_1C_1$ — горизонтальную проекцию угла после совмещения, которая будет натуральной величиной искомого угла.

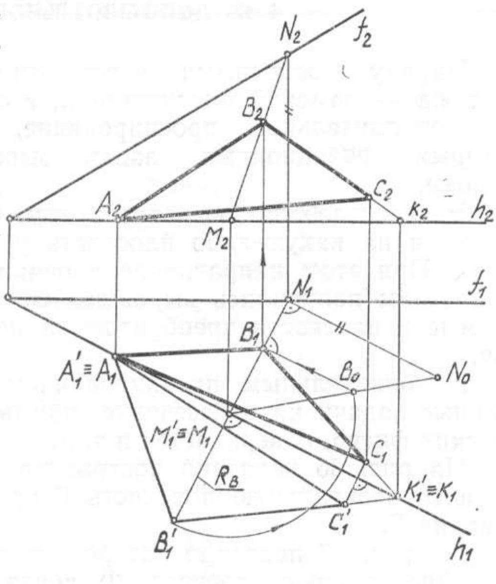


Рис. 65

Пример 34. Определить расстояние между параллельными прямыми a и b (рис. 64).

Для определения искомого расстояния повернем плоскость параллельных прямых вокруг фронтали f до совмещения ее с фронтальной плоскостью уровня Ф, проходящей через эту фронталь. Для построения совмещенного положения плоскости повернем точку K прямой b до совмещения с плоскостью Ф. Проекция K_2' совмещенного положения точки K определится на проекции Σ_2 фронтально-проецирующей плоскости, в которой происходит вращение точки. Соединив точку K_2 с неподвижной точкой D_2 и проведя через точку C_2 прямую, параллельную $K_2'D_2$, получим b_2' и a_2' — фронтальные проекции прямых после их совмещения. Расстояние l между этими проекциями и будет искомым.

Пример 35. Построить проекции $\triangle ABC$, принадлежащего плоскости $\Sigma(h \times f)$, если дана его натуральная величина $A_1'B_1'C_1'$, полученная вращением вокруг горизонтали h (рис. 65).

Решение этой задачи осуществляется обратным вращением $\triangle A_1'B_1'C_1'$ вокруг указанной горизонтали из совмещенного положения до тех пор, когда он окажется в плоскости Σ.

Построим радиус вращения R_B точки B, проведя перпендикуляр из точки B_1' к прямой h_1. Указанный радиус будет отрезком линии наибольшего уклона плоскости Σ относительно плоскости Π_1. Построим проекции M_1N_1 и M_2N_2 этой линии, а затем и ее натуральную величину методом прямоугольного треугольника. В треугольнике $M_1N_1N_0$ на гипотенузе отложим отрезок $M_1B_0 = R_B$, а затем, используя подобие треугольников, строим горизонтальную и фронтальную проекции точки B. Проекции точки C построены с помощью прямой BK, используя неподвижную точку K. Точка A является также неподвижной по заданию. Соединив фронтальные и горизонтальные проекции точек, получим искомые проекции треугольника ABC.

§ 17. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Наряду с основными способами преобразования комплексного чертежа — заменой плоскостей проекций и вращением — применяется дополнительное проецирование, которое при решении некоторых позиционных задач бывает иногда более целесообразным.

Этот способ заключается в том, что оригинал косоугольно проецируется на какую-либо плоскость уровня или проецирующую плоскость. При этом направление проецирования выбирается таким образом, чтобы получились вырожденные проекции оригинала, т. е. чтобы прямые и плоскости преобразовывались соответственно в точки и линии.

Дополнительным проецированием целесообразно решать всевозможные задачи на пересечение: прямых с плоскостью и поверхностью, плоских фигур, поверхностей и т. д.

На рис. 66 показано построение косоугольной проекции A' точки A на горизонтальную плоскость Г при заданном направлении проецирования S.

На рис. 67 показано построение косоугольной проекции l' прямой l на фронтальную плоскость Ф, когда эта прямая преобразуется в точку $l'(l_1', l_2')$. Для этого направление проецирования выбрано параллельно самой прямой.

При дополнительном проецировании плоскости ее вырожденная проекция получается в том случае, если направление проецирования параллельно данной плоскости, т. е. параллельно какой-либо прямой плоскости.

Рассмотрим примеры решения позиционных задач с применением дополнительного проецирования.

Пример 36. Построить точку F пересечения профильной прямой $P(A, B)$ с плоскостью $\Theta(CDE)$ общего положения (рис. 68).

Построим дополнительные проекции прямой p и плоскости Θ на фронтально-проецирующей плоскости Σ. Чтобы проекция плоскости Θ получилась вырожденной, выбираем направление проецирования S параллельно прямой CD. Тогда плоскость Θ спроецируется в прямую $C'E'$, а прямая p — в прямую $p'(A'B')$, в пересечении которых найдем дополнительную проекцию F' искомой точки F. На комплексном чертеже сначала построим фронтальные проекции прямой и плоскости, а затем и их горизонтальные проекции. В пересечении

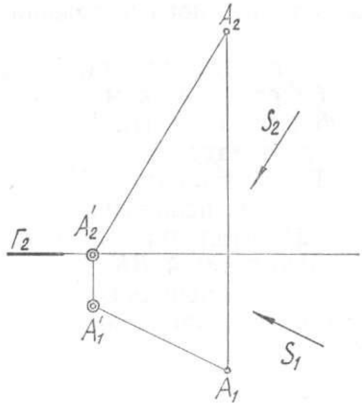


Рис. 66

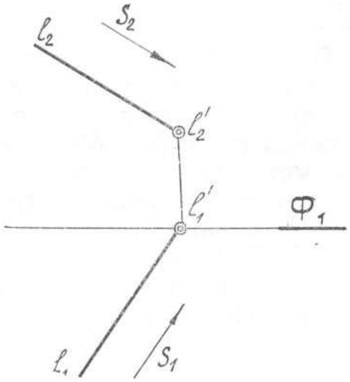
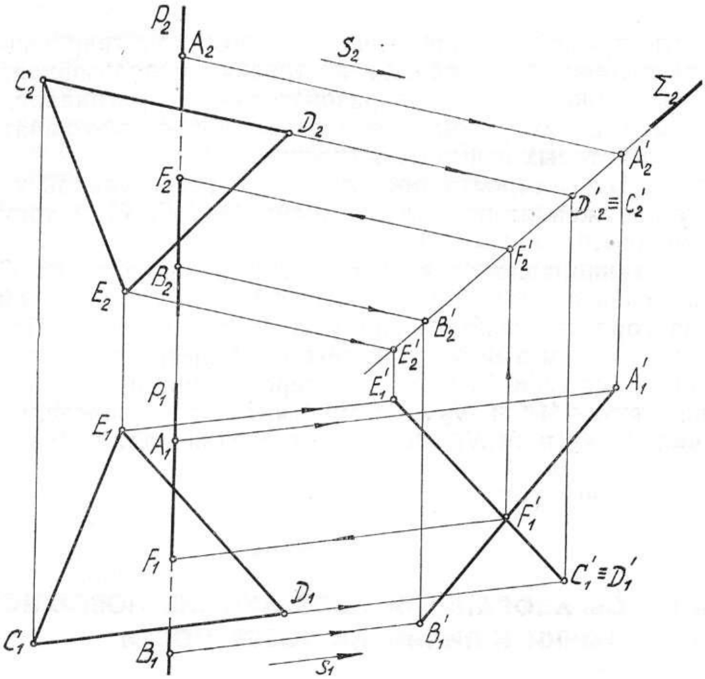
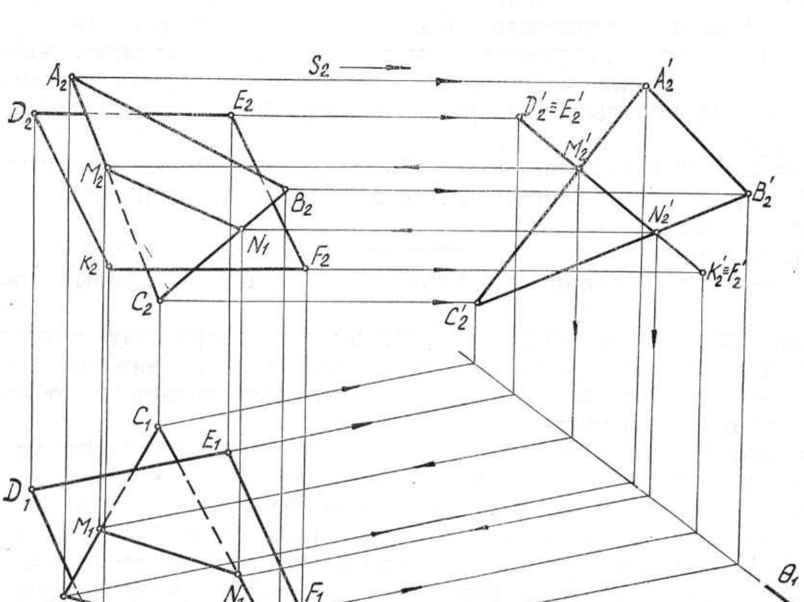


Рис. 67



P_2
A_2
S_2
Σ_2
C_2
D_2
A_2'
F_2
$D_2' \equiv C_2'$
F_2'
B_2
E_2
B_2'
E_2'
P_1
E_1'
A_1'
E_1
A_1
F_1'
F_1
$C_1' \equiv D_1'$
D_1
C_1
B_1'
B_1
S_1

Рис. 68



A_2
S_2
A_2'
D_2
E_2
$D_2' \equiv E_2'$
M_2
M_2'
B_2'
B_2
N_1
N_2'
K_2
F_2
$K_2' \equiv F_2'$
C_2
C_2'
C_1
E_1
D_1
M_1
Θ_1
N_1
F_1
A_1
K
B_1
S_1

Рис. 69

горизонтальных проекций $C_1'E_1'D_1'$ и $A_1'B_1'$ получим точку F_1', а затем при помощи обратного проецирования — основные проекции F_1 и F_2 точки F.

Видимость прямой p определена методом конкурирующих точек.

В рассмотренном примере для построения использовались только горизонтальные проекции преобразовательных оригиналов, поэтому в дальнейшем в целях упрощения чертежа будем обозначать только те проекции, на которых ведется построение.

Пример 37. Построить прямую MN пересечения двух плоскостей общего положения: параллелограмма Ω $(DEFK)$ и треугольника Σ (ABC) (рис. 69).

Примем за направление косоугольного проецирования S направление, параллельное прямой DE плоскости Ω, и спроецируем обе эти плоскости на горизонтально проецирующую плоскость Θ. Получим горизонтальные, а затем и фронтальные проекции треугольника $A_2'B_2'C_2'$ и параллелограмма $D_2'K_2'{=}E_2'F_2'$. В пересечении прямой и треугольника получим точки M_2' и N_2', с помощью которых определятся основные проекции M_1N_1 и M_2N_2 линии пересечения заданных плоскостей.

Глава IV. ОБРАЗОВАНИЕ И ИЗОБРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ. ТОЧКИ И ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ

Поверхностью называется совокупность всех последовательных положений линии, непрерывно перемещающейся в пространстве. Линия, образующая поверхность, называтеся *образующей*. Линии, по которым движется образующая, называются *направляющими*. Образующая при своем движении может оставаться все время неизменной или непрерывно меняться. Поверхности могут быть разделены на следующие группы:

а) по закону образования: на закономерные и незакономерные;

б) по признаку развертывания в плоскость: на развертываемые и неразвертываемые;

в) по форме образующей: с прямолинейной образующей — линейчатые поверхности, с криволинейной образующей — кривые поверхности;

г) по закону движения образующей: на поверхности с поступательным движением образующей, с вращательным движением образующей — поверхности вращения, с винтовым движением образующей — винтовые поверхности.

Для построения изображения поверхности на комплексном чертеже в общем случае необходимо иметь проекции всех точек, принадлежащих данной поверхности. Однако на практике можно ограничиться построением проекций некоторых точек и линий, с помощью которых на основании условий образования поверхности можно точно определить положение и вид любого элемента этой поверхности. Очень часто на чертеже поверхность задается проекциями своих направляющих и указывается способ перемещения образующих. Так, для задания на комплексном чертеже цилиндрической поверхности необходимо дать проекции направляющей и прямой линии параллелизма, для конической поверхности — проекции направляющей и вершины и т. д. Зная условия образования поверхности, можно перейти от задания ее на чертеже постоянными элементами к изображению множеством линий, ей принадлежащих. Совокупность этих линий называется *каркасом поверхности.*

Каркасный способ изображения поверхностей весьма часто используется для решения позиционных задач на поверхности, как например, построение точек и линий на поверхности, пересечение поверхности плоскостью и прямой и некоторых других.

Для придания чертежу поверхности большей наглядности часто наравне с линиями и точками, определяющими поверхность, строят на нем также и *очерк поверхности,* т. е. линии поверхности, ограничивающие на комплексном чертеже области ее проекций. Очевидно, что проекции точек, принадлежащих поверхности, должны находиться внутри очерковых линий данной поверхности.

§ 18. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Линейчатыми называются поверхности, образованные движением в пространстве прямой линии. Они бывают развертывающимися и неразвертывающимися. Первые могут быть совмещены с плоскостью. Вторые, называемые также косыми поверхностями, не могут быть развернуты в плоскость.

К линейчатым развертывающимся поверхностям относятся цилиндрические, конические, поверхности с ребром возврата (торсы), а также поверхности многогранников: призмы и пирамиды.

Цилиндрической называется поверхность, образованная движением прямой линии по направляющей кривой линии и остающейся все время параллельной некоторому данному направлению. Если направляющей будет являться ломаная линия, то образованная поверхность называется *призматической.*

Коническая поверхность образуется движением прямой линии по направляющей кривой линии и проходящей во время движения через неподвижную точку, называемую вершиной конической поверхности. Если направляющей является ломаная линия, то будет образована поверхность *пирамиды.*

Поверхностью с ребром возврата или торсом называется поверхность, образованная непрерывным движением прямолинейной образующей, касающейся во всех своих положениях некоторой пространственной кривой линии, называемой ребром возврата.

К линейчатым неразвертывающимся поверхностям относятся *поверхности с плоскостью параллелизма.* Они образуются движением прямолинейной образующей по двум направляющим линиям и остающимся параллельными некоторой плоскости, называемой *плоскостью параллелизма.* Если обе направляющие являются кривыми линиями, то поверхность называется *цилиндроидом.* Если одна из направляющих кривая, а вторая прямая — *коноидом,* обе направляющих прямые линии — *косой плоскостью* или *гиперболическим парадолоидом.*

Рассмотрим образование некоторых поверхностей и построение точек и линий, им принадлежащих.

П р и м е р 38. Построить поверхность цилиндроида, образованного движением прямой l по двум направляющим окружностям диаметром d и с центрами O и O', если плоскостью параллелизма является плоскость $П_2$. Найти недостающие проекции точки K и линии a, принадлежащих поверхности, если даны их горизонтальные проекции K_1 и a_1 (рис. 70).

Для построения проекций поверхности окружности m и n разделены на 12 равных частей. Образующая при своем скольжении по

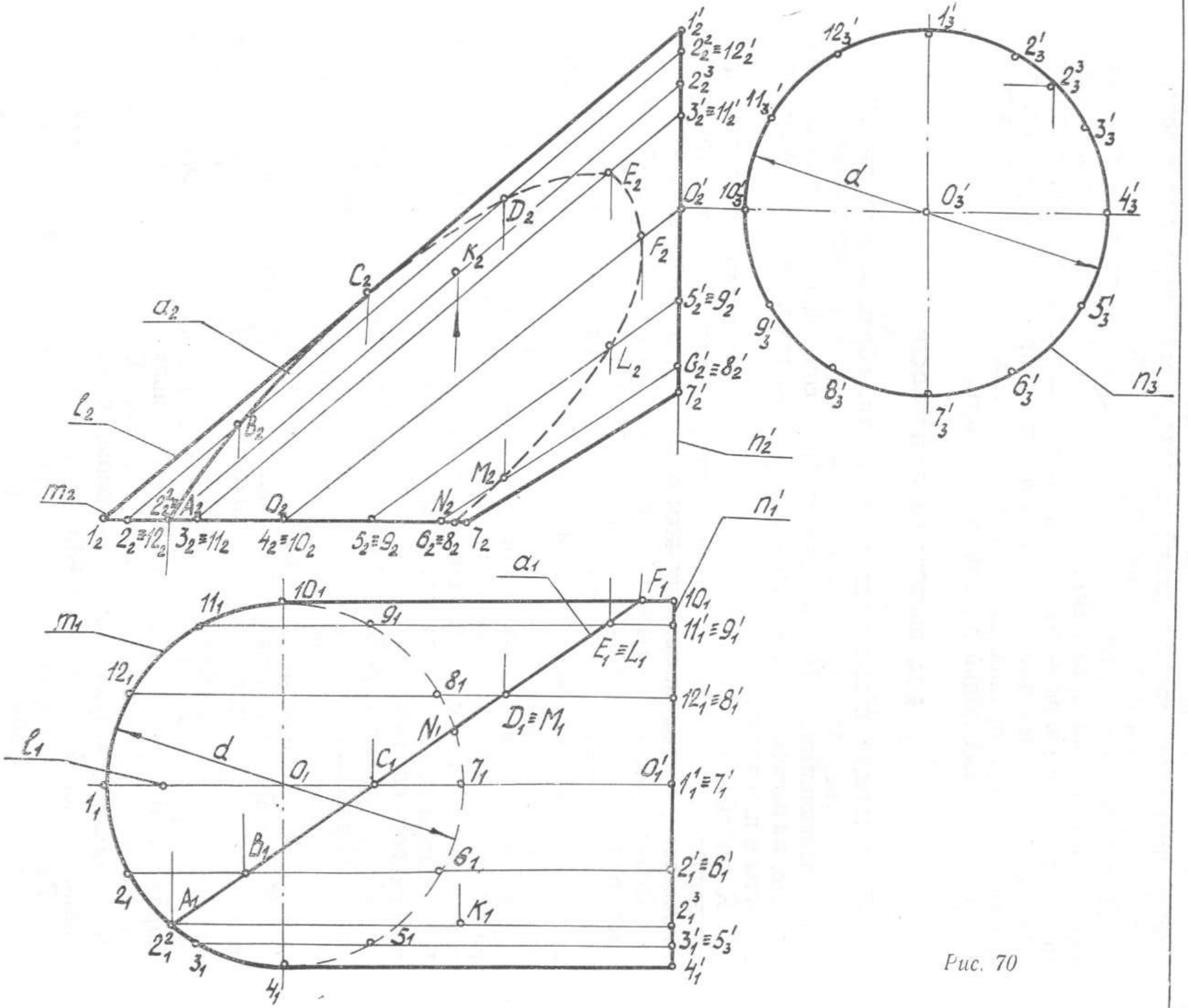


Рис. 70

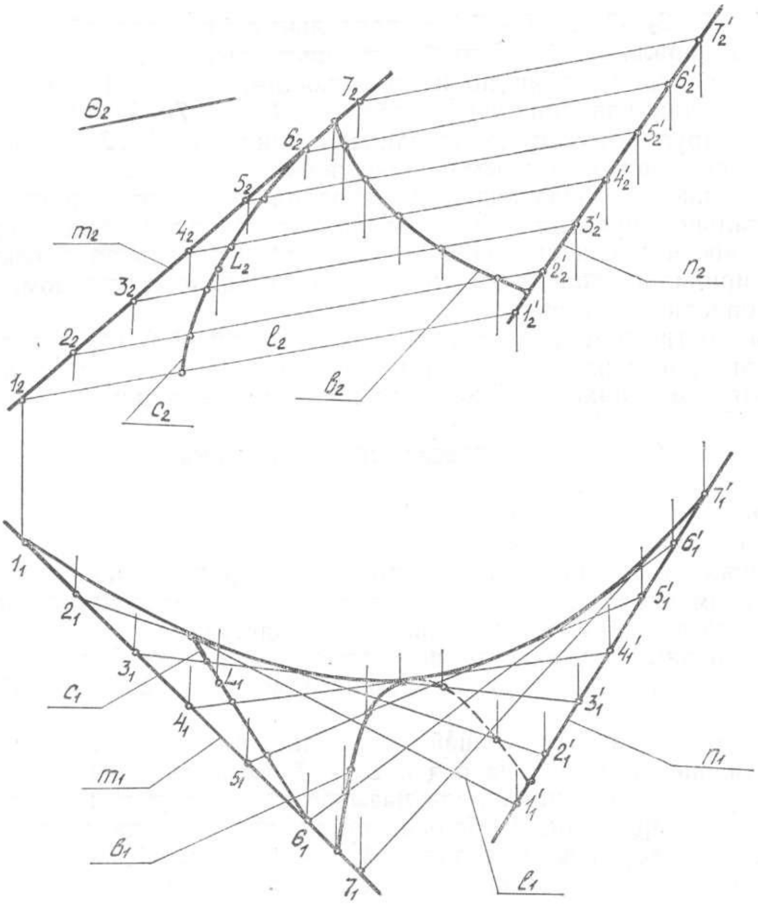


Рис. 71

этим окружностям будет последовательно занимать положения *1—1'*, *2—2'*, *3—3'*, ..., *12—12'*. Совокупность этих образующих будет определять каркас поверхности, а крайние образующие *1—1'*, *7—7'*, *4—4'*, *10—10'* вместе с направляющими m и n будут определять на соответствующих плоскостях проекций очерк поверхности.

Для построения недостающей проекции линии a цилиндроида сначала найдем точки A_1, B_1, ..., M_1, N_1 — точки пересечения ее горизонтальной проекции a_1 с соответствующими проекциями образующих. Затем, определив их фронтальные проекции A_2, B_2, ..., M_2, N_2 и соединив полученные точки плавной кривой линией, будет получена искомая фронтальная проекция a_2 линии.

Недостающая проекция точки K найдена с помощью вспомогательной образующей $2^2—2^3$ цилиндроида.

П р и м е р 39. Построить поверхность, образованную движением прямой l по двум направляющим скрещивающимся линиям m и n, если плоскостью параллелизма является плоскость Θ. Найти недостающие проекции линии b и точки L, принадлежащих поверхности, если известна их фронтальная b_2 и горизонтальная L_1 проекции (рис. 71).

Как известно, искомая поверхность будет представлять собой косую плоскость. Для построения ее каркаса на фронтальной проекции направляющей m_2 взяты точки 1_2, 2_2, ..., 7_2 и через них проведены линии l_2—l_2' 2_2—$2_2'$ ..., 7_2—$7_2'$ параллельные фронтальной проекции Θ_2 плоскости параллелизма. Это будут фронтальные проекции образующей при ее перемещении по направляющим m и n. Затем, найдя на проекциях направляющих m_1 и n_1 точки 1, 2_1,..., 7_1; $1_1'$, $2_2'$,...$7_1'$ и соединив их друг с другом, будут найдены линии 1_1—$1_1'$, 2_1—$2_1'$..., 7_1—$7_1'$ являющиеся горизонтальными проекциями образующих.

Совокупность образующих и направляющих на фронтальной и горизонтальной проекциях и будет определять на чертеже проекции каркаса косой плоскости. Недостающая горизонтальная проекция линии b_1, принадлежащей поверхности, будет найдена методом, аналогичным описанному в примере 38.

Для построения фронтальной проекции точки L через нее на поверхности проведена линия c и построена ее фронтальная проекция c_2, на которой и находится искомая проекция L_2 точки.

§ 19. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Поверхностью вращения называется поверхность, образованная какой-либо линией при ее вращении вокруг неподвижной оси. Образующая может быть, как плоской, так и пространственной линией. На комплексном чертеже поверхность вращения определяется заданием образующей и оси, вокруг которой она вращается.

Рассмотрим образование поверхности, полученной при вращении произвольной плоской кривой линии l вокруг неподвижной оси i (рис. 72).

Каждая точка образующей при вращении описывает окружность с центром, находящимся на оси i. Эти окружности называются *параллелями*. Наибольшая параллель называется *экватором*, наименьшая — *горлом*. У поверхности, изображенной на рис. 72, параллели h^1 и h^6 являются экваторами, параллель h^3 — горлом. Касательные t, t^1, t^2, проведенные через точки на этих линиях, параллельны оси вращения i.

Линия m, получаемая при пересечении поверхности вращения плоскостью Σ, проходящей через ось i, называется *меридианом*. Меридиан f, находящийся во фронтальной плоскости, называется *главным меридианом*. Из чертежа видно, что этот меридиан определяет фронтальный очерк поверхности, горизонтальный же ее очерк определяется экватором h^6 и горлом h^3.

Недостающие проекции точек на комплексном чертеже определяются с помощью соответствующих параллелей. Так, горизонтальная проекция точки A_1 найдена с помощью параллели h^1, фронтальная проекция точки B_2 с помощью параллели h^5.

Поверхности вращения получили весьма широкое применение в технике. Особенно большое распространение получили поверхности вращения второго порядка. К ним относятся:

1. *Цилиндр вращения* — поверхность, образуемая вращением прямой l вокруг параллельной ей оси i (рис. 73, а).

2. *Конус вращения* — поверхность, образуемая вращением прямой l вокруг пересекающейся с ней оси i (рис. 73, б).

3. *Однополостный гиперболоид вращения* — поверхность, образуемая вращением прямой l вокруг скрещивающейся с ней оси i (рис. 73, в).

Все точки прямой l описывают окружности различного радиуса, причем точка, находящаяся на кратчайшем расстоянии от оси i, опишет окружность, которая будет являться горлом гиперболоида. Главным меридианом этой поверхности является гипербола. Однополостный

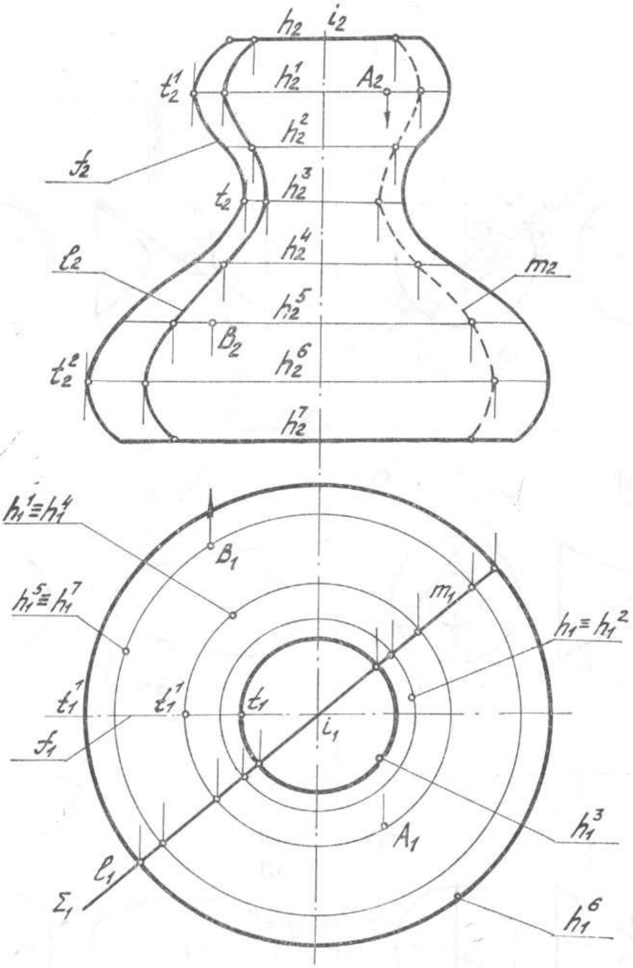


Рис. 72

гиперболоид может быть также получен вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси.

4. *Сфера* — поверхность, образуемая вращением окружности вокруг одного из ее диаметров i (рис. 73, г).

5. *Тор* — поверхность, образуемая вращением окружности l вокруг оси i, лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр (рис. 73, д).

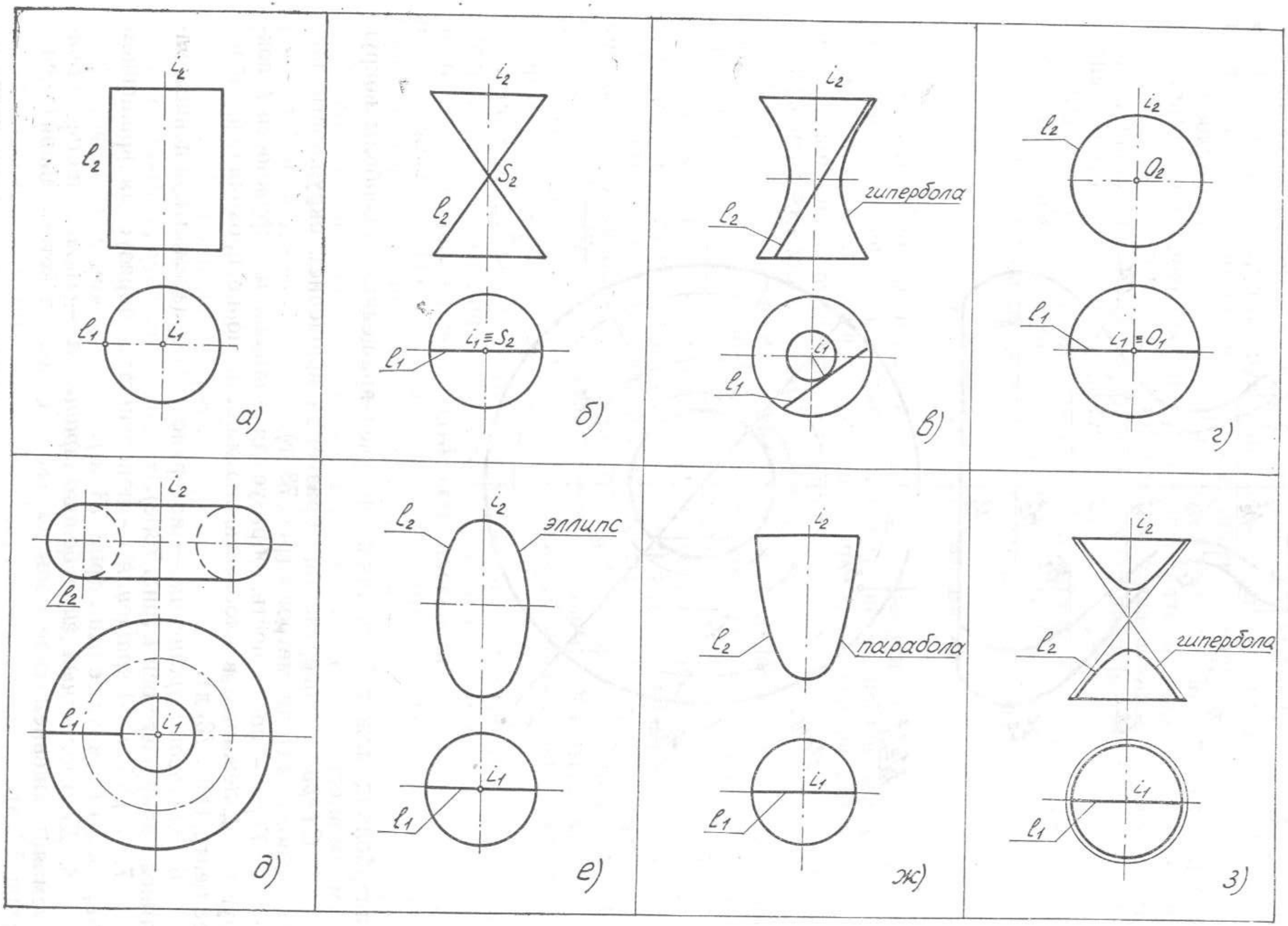
6. *Эллипсоид вращения* — поверхность, образуемая вращением эллипса l вокруг его оси i (рис. 73, е).

7. *Параболоид вращения* — поверхность, образуемая вращением параболы l вокруг ее оси i (рис. 73, ж).

8. *Двухполостный гиперболоид вращения* — поверхность, образуемая вращением гиперболы l вокруг ее действительной оси i (рис. 73, з).

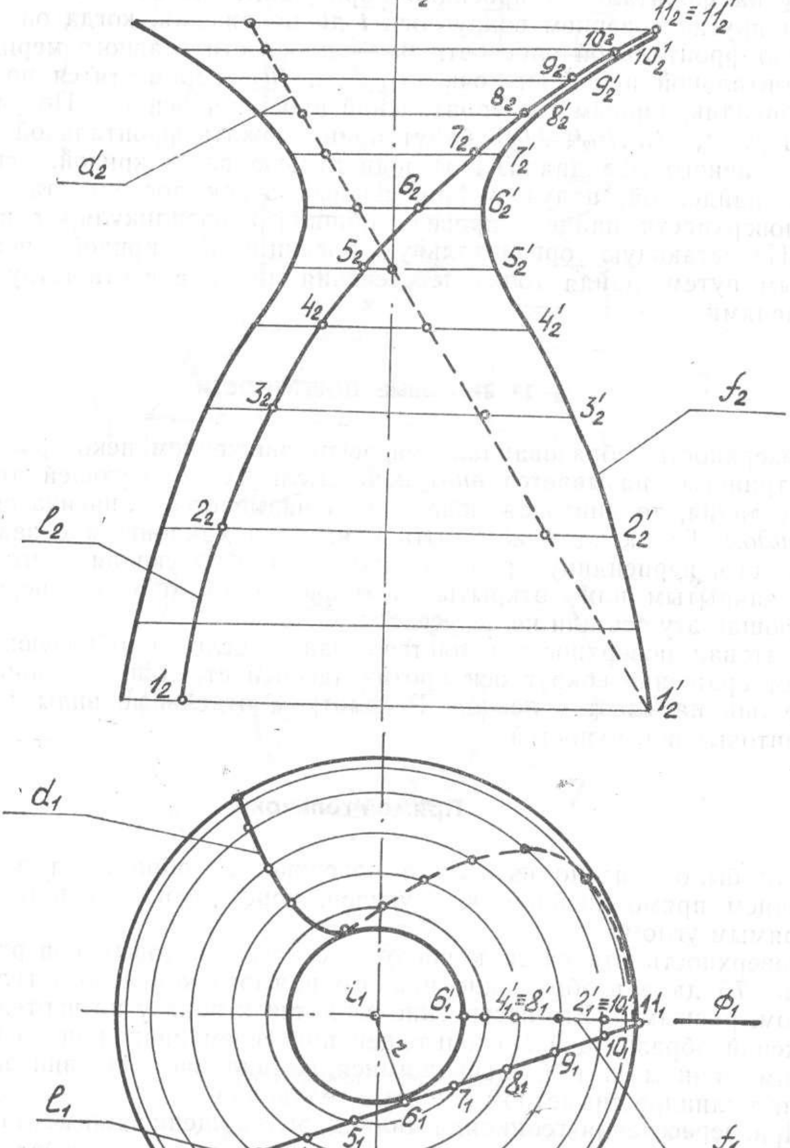
Рассмотрим построение главного меридиана поверхности, когда на комплексном чертеже она задана образующей и осью вращения.

Пример 40. Построить главный меридиан f поверхности, образуемой вращением плоской кривой линии l вокруг скрещивающейся с ней оси i, и дать очерк поверхности. Построить горизонтальную



i_2
l_2
l_1
i_1
а)
S_2
$i_1 \equiv S_2$
б)
гипербола
в)
O_2
$i_1 \equiv O_1$
г)
д)
эллипс
е)
парабола
ж)
з)

Рис. 73



i_2
$11_2 \equiv 11'_2$
10_2
$10'_2$
9_2
$9'_2$
8_2
$8'_2$
7_2
$7'_2$
d_2
6_2
$6'_2$
5_2
$5'_2$
4_2
$4'_2$
f_2
3_2
$3'_2$
2_2
$2'_2$
l_2
1_2
$1'_2$
d_1
i_1
$6'_1$
$4'_1 \equiv 8'_1$
$2'_1 \equiv 10'_1$
11_1
ϕ_1
10_1
9_1
8_1
7_1
6_1
5_1
4_1
3_1
2_1
1_1
l_1
f_1

Рис. 74

проекцию кривой d, принадлежащей поверхности, если дана ее фронтальная проекция (рис. 74).

Построение осуществим следующим образом.

Разделим горизонтальную проекцию образующей l на десять частей и найдем на них точки 1_1, 2_1..., 10_1, 11_1, а затем и точки 1_2, 2_2,..., 10_2, 11_2 на фронтальной проекции образующей. После этого точки 1_1, 2_1 и другие повернем вокруг оси i до положения, когда они окажутся во фронтальной плоскости Ф — плоскости главного меридиана. На фронтальной проекции точки 1_2, 2_2,..., 10_2 переместятся по линиям, перпендикулярным к фронтальной проекции оси i_2. Полученные точки $1_2'$, $2_2'$, $3_2'$...,$10_2'$, $11_2'$ будут принадлежать фронтальной проекции f_2 главного меридиана. Построив вторую ветвь кривой, симметричную найденной, получим фронтальный очерк поверхности. Горловину поверхности найдем, проведя общий перпендикуляр r прямых i и l. Недостающую горизонтальную проекцию d_1 кривой построим обычным путем, найдя точки пересечения линии с соответствующими параллелями.

§ 20. ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность, образованная винтовым движением некоторой линии в пространстве, называется *винтовой*. Если ее образующей является прямая линия, то винтовая поверхность называется линейчатой или *геликоидом*. Геликоид может быть прямым и наклонным в зависимости от того, перпендикулярна или наклонна образующая к его оси, а также закрытым или открытым в зависимости от того, пересекает образующая эту ось или не пересекает.

Винтовая поверхность является правой, если ее образующая совершает вращение вокруг оси против часовой стрелки, в противном случае она называется левой. Рассмотрим отдельные виды линейчатых винтовых поверхностей.

Прямой геликоид

Как было сказано выше, эта поверхность образуется винтовым движением прямолинейной образующей, пересекающей ось геликоида под прямым углом.

Поверхность относится к числу закрытых винтовых поверхностей. На рис. 75 дано изображение правого прямого кольцевого геликоида с шагом, равным h. Его построение сводится к показу на чертеже ряда положений образующей l, скользящей при своем движении по направляющим линиям m и i, являющимися цилиндрической винтовой линией на цилиндре диаметром D и осью геликоида.

При пересечении геликоида цилиндром вращения диаметром d будет получена поверхность, называемая *прямым кольцевым геликоидом*. Линией пересечения цилиндра с геликоидом будет цилиндрическая винтовая линия n, построение которой ясно из чертежа.

По способу образования прямой геликоид может быть отнесен к числу коноидов и поэтому его можно назвать *винтовым коноидом*. Его плоскостью параллелизма будет плоскость, перпендикулярная к оси геликоида. В рассмотренном примере такой плоскостью является плоскость $П_1$.

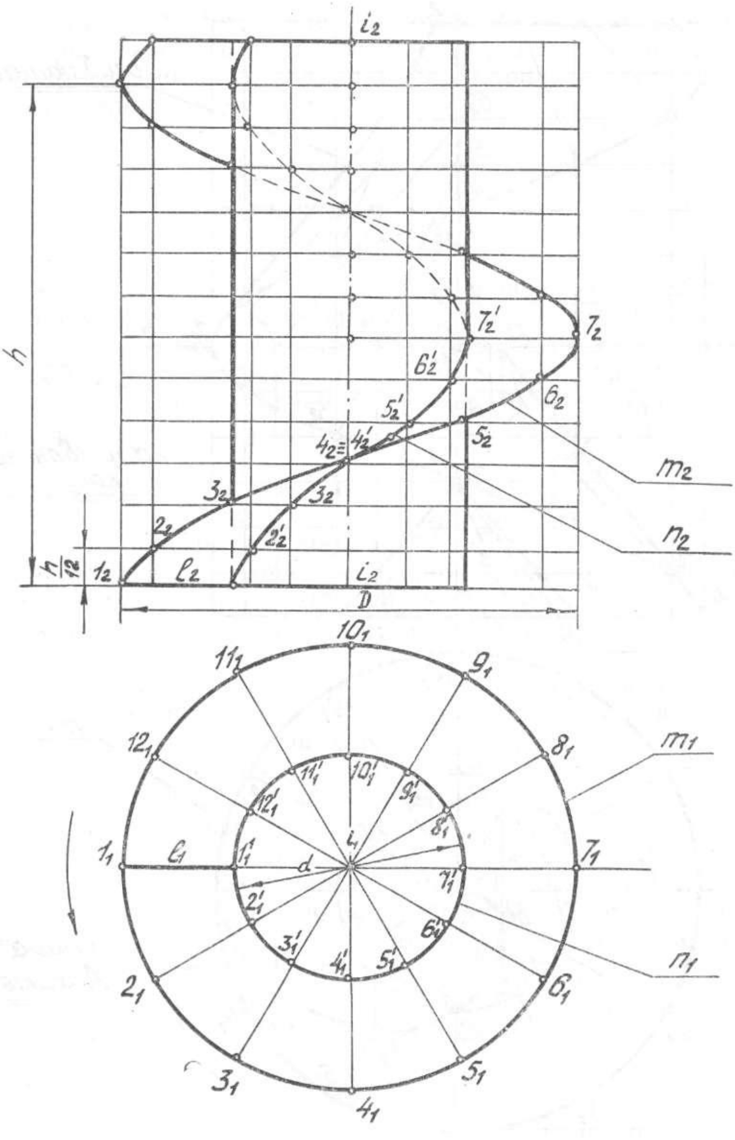


Рис. 75

Наклонный геликоид

Эта поверхность образуется винтовым движением прямолинейной образующей l по направляющей цилиндрической винтовой линии m и пересекающей ее ось i, остающейся все время параллельной образующим некоторого конуса вращения, называемого направляющим конусом.

Направляющий конус имеет общую ось с винтовой поверхностью и угол между образующей и осью, равный углу β наклона образующей поверхности к ее оси.

Построение винтовой поверхности при заданных шаге h, угле наклона образующих β и диаметре цилиндра D осуществляется следующим образом (рис. 76):

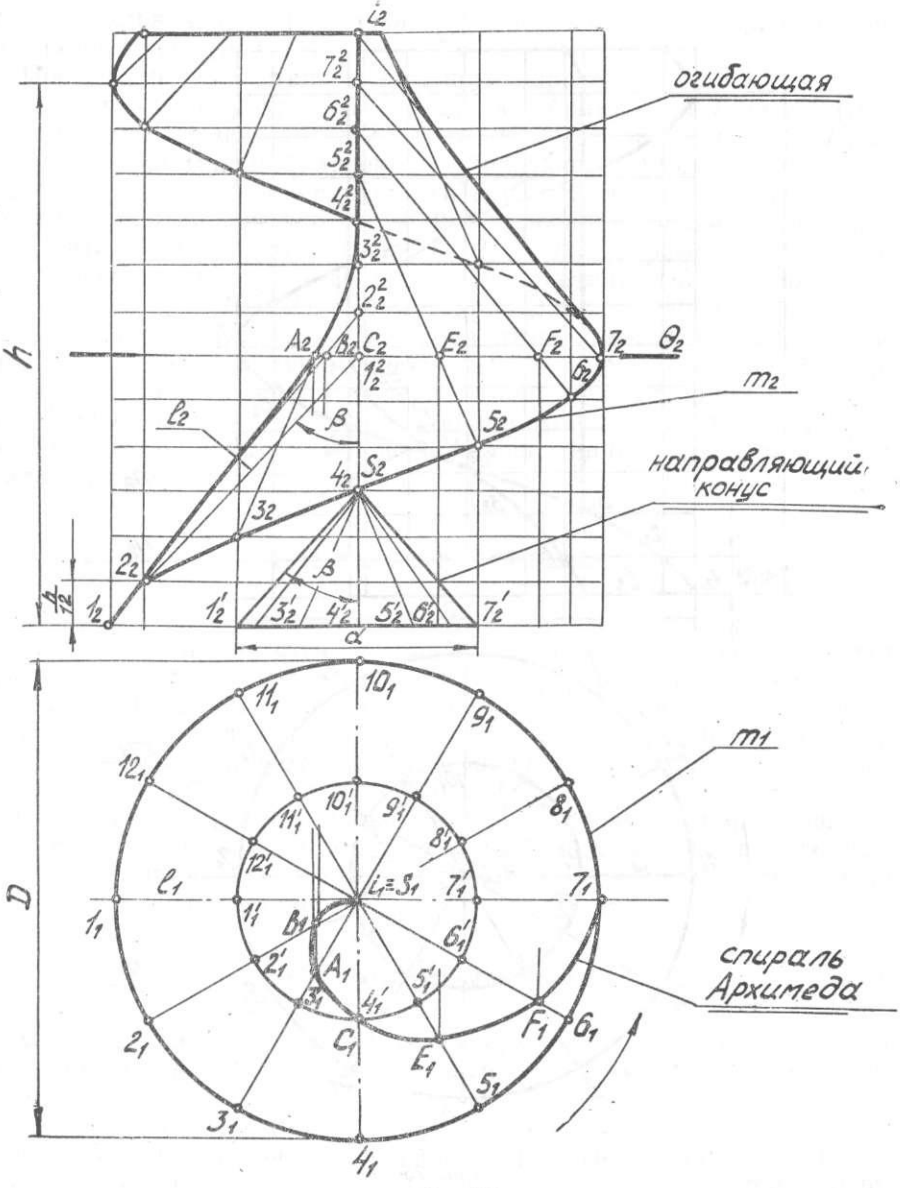


Рис. 76

а) на цилиндре, начиная от точки *1*, строится винтовая линия $m(m_1, m_2)$ с шагом h, являющаяся одной из направляющих поверхности;

б) задаваясь диаметром d, строится направляющий конус с вершиной S на оси i и углом наклона образующих β; затем в нем проводятся образующие $S—1'$, $S—2'$, $S—3'$,..., $S—12'$, как на фронтальной, так и на горизонтальной проекциях;

в) из точек 1_2, 2_2, 3_2,... проводятся образующие поверхности $1_2—1_2'$ $2_2—2_2'$, $3_2—3_2'$,... параллельные образующим $S_2—1_2'$, $S_2—2_2'$, $S_3—3_2'$,... направляющего конуса.

Совокупность семейства образующих, ограниченных цилиндрической винтовой линией и осью, будет представлять собой поверхность наклонного геликоида. Если рассечь поверхность плоскостью $\Theta(\Theta_2)$, перпендикулярной к оси i, то в сечении получится кривая линия — спираль Архимеда, поэтому наклонный геликоид часто называют *архимедовой винтовой поверхностью.*

Эвольвентный геликоид

Эвольвентным геликоидом называется поверхность, образованная движением прямой линии, остающейся во всех своих положениях касательной к цилиндрической винтовой линии. Для этой винтовой поверхности угол наклона образующей к горизонтальной плоскости равен углу подъема винтовой линии. Эвольвентный геликоид относится к открытым винтовым поверхностям и может быть развернут в плоскость.

Если известны шаг винтовой поверхности h, диаметр основного и вспомогательного цилиндров d и D, то поверхность на чертеже можно построить следующим образом (рис. 77):

1) на фронтальной и горизонтальной проекциях строится основной и вспомогательный цилиндры;

2) окружность основания вспомогательного цилиндра делится на равное число частей (не менее *12*) и из точек 1_1, 2_1, 3_1,..., 12_1 проводятся касательные к окружности основного цилиндра и находятся точки $1_1'$, $2_2'$, $3_1'$..., $12_2'$. Линии $1_1—1'_1$, $2_1—2'_1$,..., $12_1—12_1'$ являются горизонтальными проекциями образующих поверхности;

3) шаг h делится на число частей, соответствующее числу делений окружности, и на фронтальной проекции проводятся образующие основного и вспомогательного цилиндров;

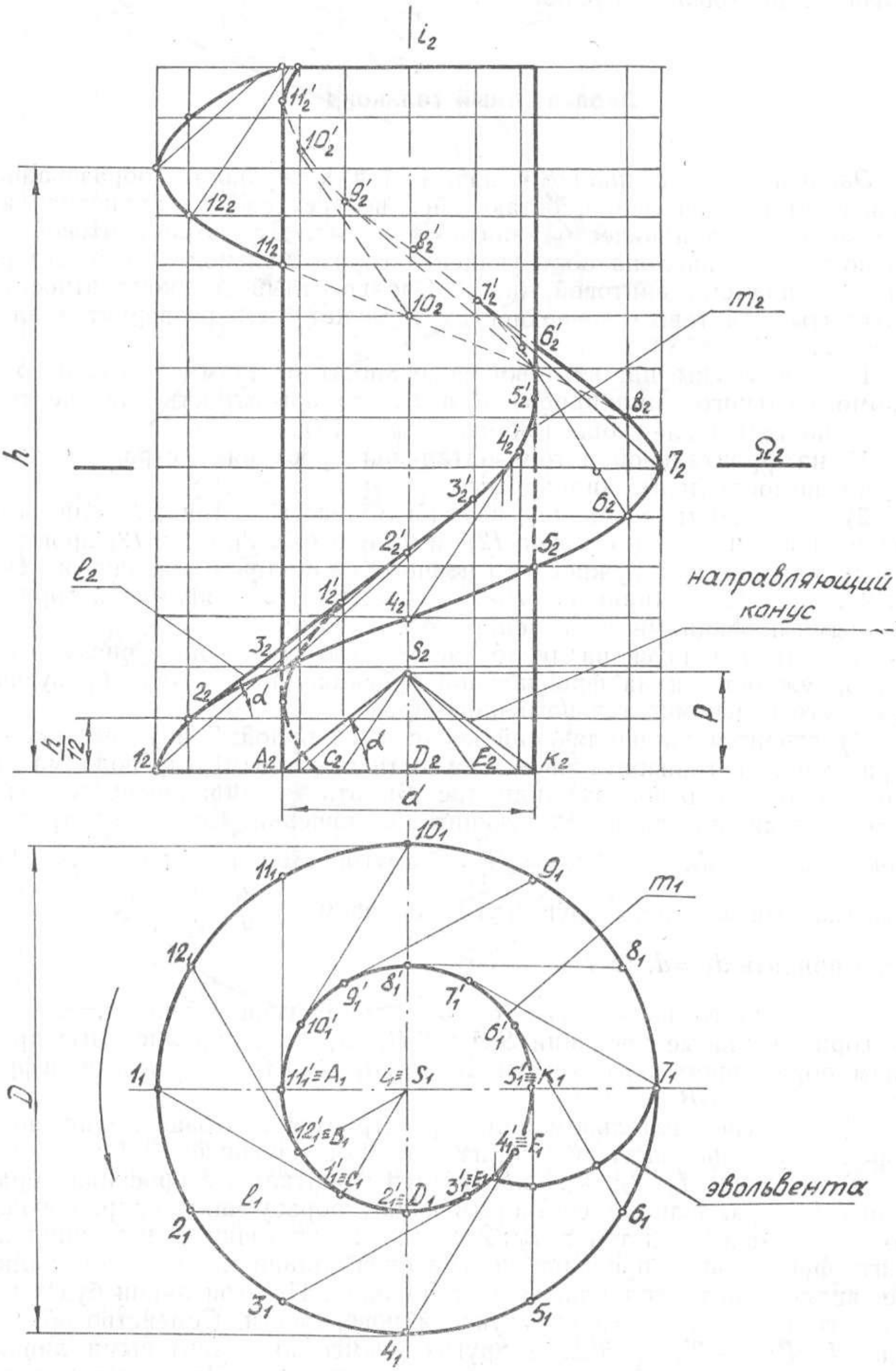
4) строится направляющий конус с вершиной S и углом наклона образующих к горизонтальной плоскости α, равным углу подъема винтовой линии на основном цилиндре. Высота P направляющего конуса определяется, исходя из следующих соотношений. Если диаметр основания конуса d_1, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2P}{d_1}$. С другой стороны, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\pi d}$. Приравнивая эти величины друг другу, получаем $P = \frac{d_1}{d}\ \frac{h}{2\pi}$.

Если принять $d_1 = d$, то $P = \frac{h}{2\pi}$.

После этого на чертеже строятся образующие конуса, сначала их горизонтальные проекции S_1A_1; S_1B_1; S_1C_1,...., параллельные проекциям образующих поверхности $2_1—2_1'$; $3_1—3_2'$; $4_1—4_1'$..., а затем и фронтальные S_2A_2; S_2B_2; S_2C_2;

5) на вспомогательном цилиндре строится винтовая линия, по которой будет перемещаться один из концов образующей;

6) из точек 1_2; 2_2; 3_2;... проводятся фронтальные проекции образующей l, параллельные соответствующим образующим направляющего конуса, и находятся точки $1_2'$; $2_2'$; $3_2'$;... . Эти точки будут принадлежать фронтальной проекции m_2 винтовой линии на основном цилиндре, являющейся направляющей геликоида. По этой линии будет перемещаться другой конец образующей поверхности. Семейство образующих $1—1'$; $2—2'$; $3—3'$.... и других совместно с винтовыми линиями будут определять искомую винтовую поверхность. При пересечении геликоида плоскостью $\Omega(\Omega_2)$, перпендикулярной к оси i, будет получена кривая линия — *эвольвента круга*, почему эта поверхность и названа *эвольвентным геликоидом*. По способу образования построенный



i_2
$11_2'$
$10_2'$
$9_2'$
$8_2'$
12_2
11_2
10_2
$7_2'$
m_2
$6_2'$
$5_2'$
8_2
$4_2'$
7_2
Ω_2
h
$3_2'$
6_2
$2_2'$
5_2
l_2
$1_2'$
4_2
направляющий
конус
3_2
S_2
2_2
α
p
$\frac{h}{12}$
1_2
A_2
C_2
D_2
E_2
K_2
d
10_1
11_1
9_1
m_1
12_1
8_1
$9_1'$
$8_1'$
$7_1'$
$10_1'$
$6_1'$
D
1_1
$11_1' \equiv A_1$
$i_1 \equiv S_1$
$5_1' \equiv K_1$
7_1
$12_1' \equiv B_1$
$4_1' \equiv E_1$
$1_1' \equiv C_1$
l_1
$2_1' \equiv D_1$
$3_1' \equiv E_1$
эвольвента
6_1
2_1
3_1
5_1
4_1

Рис. 77

геликоид относится к линейчатым поверхностям с ребром возврата, у него направляющая линия m — ребро возврата.

Конволютный геликоид

Эта поверхность образуется винтовым движением прямолинейной образующей, скользящей по винтовой линии на цилиндре и остающейся все время касательной к этому цилиндру. В отличие от эвольвентного геликоида угол наклона образующей l поверхности к горизонтальной плоскости не равен углу подъема винтовой линии n на основном цилиндре.

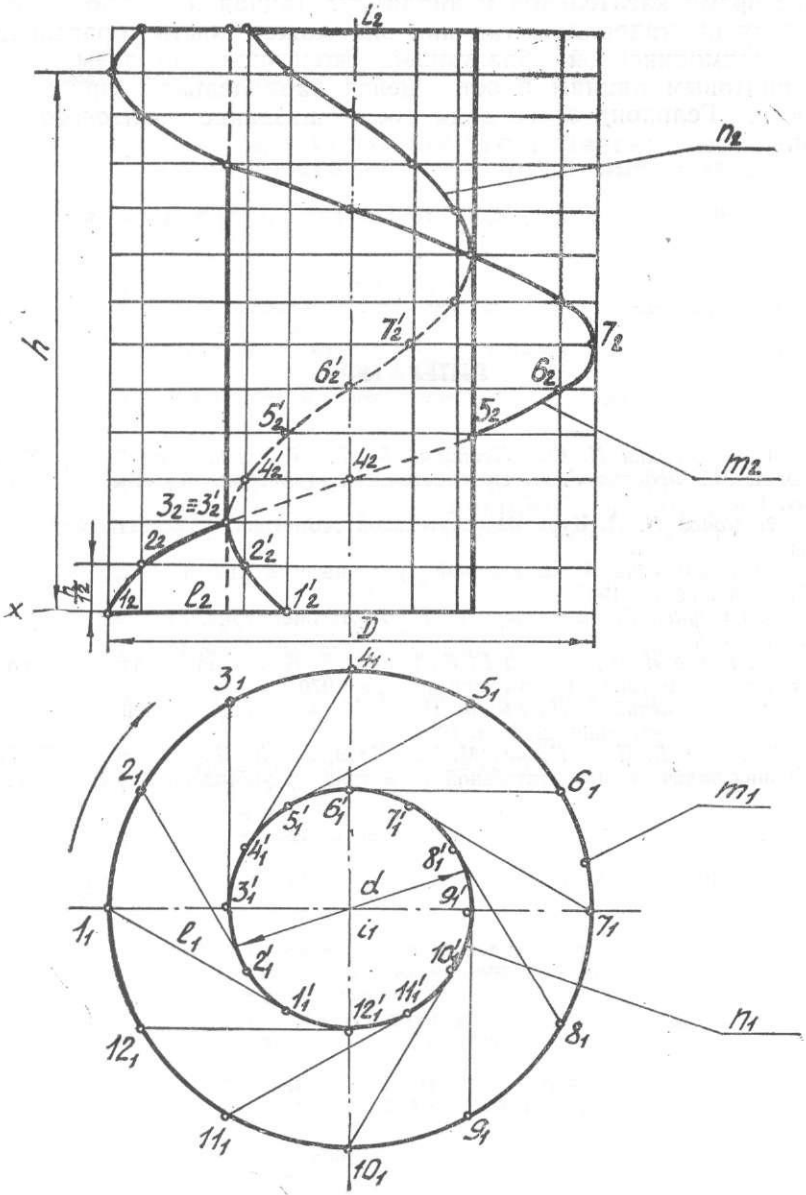


Рис. 78

Построение конволютного геликоида сходно с построением эвольвентного геликоида с той лишь разницей, что направляющий конус строится исходя из выбранного диаметра его основания d и угла наклона α образующей, и высота его зависит только от этих параметров и не связана с шагом h поверхности.

В технике применяется конволютный геликоид, у которого угол наклона образующей l к горизонтальной плоскости равен нулю. Такой геликоид и показан на рис. 78. В отличие от разобранных ранее винтовых поверхностей у него направление витков левое.

Построение этой поверхности сходно с построением прямого геликоида, только здесь вращение образующей вокруг оси происходит по часовой стрелке и горизонтальная ее проекция на чертеже остается все время касательной к цилиндру. Данная поверхность относится к числу цилиндроидов, так как она может быть образована движением прямолинейной образующей, скользящей по двум направляющим винтовым линиям и остающейся параллельной горизонтальной плоскости. Геликоид этого вида носит название *винтового цилиндроида.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четверухин Н. Ф., Левицкий В. С., Прянишникова З. И., Тевлин А. М., Федотов Г. И.* Начертательная геометрия. М., «Высшая школа», 1965.
2. *Попов Н. А.* Курс начертательной геометрии. Гостехтеоретиздат, 1947.
3. *Посвянский А. Д.* Краткий курс начертательной геометрии. М., «Высшая школа», 1965.
4. *Глазунов Е. А., Четверухин Н. Ф.* Аксонометрия. М., Гостехтеоретиздат, 1953.
5. *Котов И. И., Амиянц Е. В., Осипов В. А.* Сборник задач по начертательной геометрии. М., «Высшая школа», 1970.
6. *Посвянский А. Д., Рыжов Н. Н.* Сборник задач по начертательной геометрии. М., «Высшая школа», 1966.
7. *Панич В. И., Кочнев М. И., Иващенко К. И., Стуканова Г. Ф.* Сборник задач по начертательной геометрии. Куйбышев, КуАИ, 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Виктор Иванович Панин,
Михаил Иванович Кочнев,
Клара Ивановна Иващенко,
Галина Ивановна Панкова

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДЕТАЛЕЙ САМОЛЕТА И ДВИГАТЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор Н. В. Касаткина
Техн. редактор Н. М. Каленюк
Корректор Т. В. Полякова

ЕО00335. Сдано в набор 16.05.77 г. Подп. в печать 3.XI.77 г. Формат 70×108[1]/16. Бумага оберточная белая. Физ. п. л. 4. Усл. печ. л. 4,9. Уч.-изд. л. 4,86. Тир. 1500 экз. Цена 20 коп.

Куйбышевский авиационный институт им. С. П. Королева.
Куйбышев, Молодогвардейская, 151.

Темплан 1977, поз. № 2315. Заказ № 3114.

Типография изд-ва «Волжская коммуна»,
г. Куйбышев, проспект Карла Маркса, 201.